Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2009
23. Juni 2009
Blatt 10

Übungen zu Analysis I

41. (a) Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x - \sin x \cos x.$$

Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2\sin^2 x$.

(b) Welchen Definitionsbereich hat die Funktion f, die durch

$$f(x) := \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

definiert ist? Berechnen Sie f'.

(c) Welchen Definitionsbereich hat die Funktion f, die durch

$$f(x) := \log(\tan \frac{x}{2})$$

definiert ist? Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

(d) Finden sie eine differenzierbare Funktion f, die auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert ist und die dort die Eigenschaft $f'(x) = \frac{1}{\sin x}$ hat.

42. (a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $\cosh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 35).

(b) Zeigen Sie, dass cosh auf dem Intervall $]0, \infty[$ und sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton ist; die Umkehrfunktionen heißen Arcosh und Arsinh.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ und $\operatorname{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

43. Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

Fertigen Sie Skizzen von f_0, f_1 und f_2 an und zeigen Sie:

(a) f_0 ist in 0 nicht stetig.

(b) f_1 ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

(c) f_2 ist differenzierbar, aber f_2' ist in 0 nicht stetig.

Bitte wenden!

(d) Ist $f(x) := f_2(x)^2$, so hat f ein lokales Minimum an der Stelle 0, aber für jedes $\varepsilon > 0$ ist f im Intervall $]0, \varepsilon[$ nicht monoton wachsend und im Intervall $]-\varepsilon, 0[$ nicht monoton fallend.

44. (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) > 0$, so gibt es ein offenes Intervall I, das x_0 enthält und auf dem f monoton wachsend ist.

(b) Sei $f(x) := \frac{1}{2}x + f_2(x)$, wobei f_2 wie in Aufgabe 43 ist. Dann ist $f'(0) = \frac{1}{2}$, aber es gibt kein offenes Intervall I, das 0 enthält und auf dem f monoton wachsend ist.

Abgabe: Dienstag, den 30. Juni 2009, 11.10 Uhr