

Übungen zu Analysis I

49. Finden Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 81}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

50. Berechnen Sie mittels der Substitutionsregel:

$$\int \log(ax + b) dx, \quad \int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx, \quad \int xe^{-x^2} dx.$$

51. Berechnen Sie mittels partieller Integration:

$$\int (\log x)^2 dx, \quad \int (\log x)^3 dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

52. Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für $n \geq 2$ die folgenden Rekursionsgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, \\ \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

53. (a) Ist $f(x)$ eine gebrochen-rationale Funktion in $\sin x$ und $\cos x$, so wird $\int f(x) dx$ durch die Substitution $u = \tan \frac{x}{2}$ auf das Integral einer gebrochen-rationalen Funktion zurückgeführt.

Bitte wenden!

(b) Zeigen Sie mit der Methode von a), dass

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

(c) Ist $f(x)$ eine gebrochen-rationale Funktion in x und $\sqrt{1-x^2}$, so wird $\int f(x)dx$ durch die Substitution $x = \cos u$ auf den in a) betrachteten Fall zurückgeführt.

Abgabe: Dienstag, den 14. Juli 2009, 11.10 Uhr