Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2009
5. Mai 2009
Blatt 3

Übungen zu Analysis I

10. Wir definieren eine Folge (a_n) rekursiv durch

$$a_1 := \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}.$$

   (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < 2$.

   (b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   Die Folge (a_n) ist streng monoton wachsend.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$
   (Tipp: Gehen Sie vor wie beim Beispiel nach Satz 8 von § 2).

11. Wir definieren eine Folge (a_n) rekursiv durch

$$a_1 := 1,$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\,(a_n + \frac{2}{a_n}).$$

   Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

12. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+4+5+\ldots+n}{n^2}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2}{n^4}$

13. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Zeigen Sie mit der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.

Abgabe: Dienstag, den 12. Mai 2009, 11.10 Uhr