Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2009
19. Mai 2009
Blatt 5

Übungen zu Analysis I

19. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
    (a) Zeigen Sie, dass $\frac{5}{4} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{7}{4}$.
    (b) Bestimmen Sie mithilfe eines Taschenrechners die erste Nachkommastelle von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

20. (a) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl ϑ mit $\vartheta < 1$, so dass
$$|a_n| \leq \vartheta^n \text{ für fast alle } n.$$
    Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
    (b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ konvergiert.

21. Zeigen Sie, dass
$$0.6 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \leq 0.8.$$

22. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir
$$a_n := \frac{1}{n\sqrt{n}} \ , \ s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \ , \ t_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \ , \ b_n := \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$
    Zeigen Sie:
    (a) (b_n) ist eine Nullfolge.
    (b) $s_{2n} = t_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_n$.
    (c) $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) s_n = t_{2n} - b_n$.
    (d) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergiert.

Abgabe: Dienstag, den 26. Mai 2009, 11.10 Uhr