Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2009
26. Mai 2009
Blatt 6

Übungen zu Analysis I

23. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x \leq 2, \\ x + 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen von f, zeigen Sie, dass f stetig und bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f.

24. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir definieren $h : D \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Zeigen Sie, dass h stetig ist.

25. Zeigen Sie: Ist I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $I \subseteq f(I)$, so gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = x$.
(Tipp: Betrachten Sie $g(x) := f(x) - x$).

26. Folgern Sie aus dem Binomischen Lehrsatz: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} k = n2^{2n-1}.$$

Abgabe: Dienstag, den 2. Juni 2009, 11.10 Uhr