Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2009
02. Juni 2009
Blatt 7

Übungen zu Analysis I

27. Wie am Anfang von § 6 der Vorlesung definieren wir eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ durch
$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v),$$
$$(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,xv+yu).$$
Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ein Körper ist.

28. Fertigen Sie Skizzen der folgenden Mengen an:
   (a) $\{z\in\mathbb{C}|\ \overline{z}=-z\}$
   (b) $\{z\in\mathbb{C}|\ z\neq 0 \text{ und } \overline{z}=z^{-1}\}$
   (c) $\{z\in\mathbb{C}|\ |z-1|=|z-i|\}$
   (d) $\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(z)<\mathrm{Im}(z)\}$
   (e) $\{z\in\mathbb{C}|\ |z-i|<1\}$
   (f) $\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(z^2)>0\}$

29. Seien $z,w\in\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass
$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$
und interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.

30. Wir nennen eine Teilmenge G von $\mathbb{C}$ eine <u>Gerade</u>, wenn es Zahlen $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ mit $\beta\neq 0$ und $G=\{\beta\, t+\gamma \mid t\in\mathbb{R}\}$ gibt. Zeigen Sie:
   (a) Ist $b\in\mathbb{C}, b\neq 0$ und $c\in\mathbb{R}$, so ist die Menge $\left\{z\in\mathbb{C}\mid bz+\overline{b}\overline{z}+c=0\right\}$ eine Gerade.
   (b) Ist G eine Gerade, so gibt es ein $b\in\mathbb{C}$ mit $b\neq 0$ und ein $c\in\mathbb{R}$ mit
$$G=\left\{z\in\mathbb{C}\mid bz+\overline{b}\ \overline{z}+c=0\right\}.$$

31. Wir nennen eine Teilmenge K von $\mathbb{C}$ einen <u>Kreis</u>, wenn es ein $z_0\in\mathbb{C}$ und ein $r>0$ gibt mit
$$K=\{z\in\mathbb{C}\mid |\ z-z_0\ |\ =r\}.$$
Zeigen Sie: Eine Teilmenge K von $\mathbb{C}$ ist genau dann ein Kreis, wenn es reelle Zahlen a,c mit $a\neq 0$ und eine komplexe Zahl b mit $|b|^2>ac$ gibt, so dass
$$K=\left\{z\in\mathbb{C}\mid a\ |z|^2+bz+\overline{b}\ \overline{z}+c=0\right\}.$$

Abgabe: Dienstag, den 9. Juni 2009, 11.10 Uhr