Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2009
09. Juni 2009
Blatt 8

Übungen zu Analysis I

32. (a) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist
$$1 - z^n = (1-z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})$$
(b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, so gilt: Die Summe aller n-ten Einheiswurzeln ist 0.
(c) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$ und $z^3 = 1$. Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$.

33. Zeigen Sie, dass für alle rellen Zahlen x, y gilt:
(a) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
(b) $\cos(x + \pi) = -\cos x$
(c) $\sin(x + \pi) = -\sin x$
(d) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
(e) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
(f) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
(g) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
(h) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
(i) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
(j) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

34. Man definiert Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch
$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.
(a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ und beweisen Sie Additionstheoreme für cosh und sinh.
(b) Skizzieren Sie die Graphen der durch $x \mapsto \cosh x$ und $x \mapsto \sinh x$ definierten Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

35. Durch $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ definiert man Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die entsprechenden reellen Funktionen fortsetzen.
(a) $\cos z = \cosh(iz)$ und $\sin z = -i \sinh(iz) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
(b) Ist $w \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $x \in \mathbb{C}$ mit $x \neq 0$ und $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) = w$.
(c) Ist $w \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos z = w$.

Abgabe: Dienstag, den 16. Juni 2009, 11.10 Uhr