Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

# Übungen zur Einführung in die Algebra

## Blatt 10

**Aufgabe 1.** Sei $K$ ein Körper, und $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Wir wählen einen algebraischen Abschluß $K \subset \Omega$ und faktorisieren $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \omega_i)$ mit den Wurzeln $\omega_i \in \Omega$. Man bezeichnet

$$\operatorname{dis}(f) = \prod_{i<j}(\omega_i - \omega_j)^2 \in \Omega$$

als die *Diskriminante* von $f$.

(i) Verifizieren Sie, daß $\operatorname{dis}(f) \neq 0$ gilt genau dann, wenn $f$ separabel ist.

(ii) Beweisen Sie, daß $\operatorname{dis}(f) \in K$ gilt. Unterscheiden Sie die Fälle, daß $f$ nichtseparabel bzw. separabel ist, und benutzen Sie den separablen Abschluß von $K$ in $\Omega$.

(iii) Verifizieren Sie die beiden Formeln

$$\operatorname{dis}(X^2 + pX + q) = p^2 - 4q,$$
$$\operatorname{dis}(X^3 + q) = -27q^2.$$

Benutzen Sie für die zweite Formel am besten dritte Einheitswurzeln.

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper, $f \in K[X]$ ein normiertes separables Polynom vom Grad $n = \deg(f)$, und $K \subset L$ sein Zerfällungskörper. Wir faktorisieren $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ mit den Wurzeln $\lambda_i \in L$.

(i) Sei $g \in \operatorname{Gal}(L/K)$. Zeigen Sie, daß $g(\lambda_i) = \lambda_{\sigma_g(i)}$ für eine Permutation $\sigma_g \in S_n$ gilt, und daß die Abbildung $\operatorname{Gal}(L/K) \to S_n$, $g \mapsto \sigma_g$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii) Beweisen Sie, daß dieser Homomorphismus $\operatorname{Gal}(L/K) \to S_n$ injektiv ist.

**Aufgabe 3.** Sei $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Wir bezeichnen eine Untergruppe $H \subset G$ als *abgeschlossen*, wenn es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt mit $H = \mathrm{Gal}(L/E)$.

(i) Verifizieren Sie, daß die beiden Untergruppen $1, G \subset G$ abgeschlossen sind.

(ii) Sei $H_\alpha \subset G$, $\alpha \in I$ eine Familie von abgeschlossenen Untergruppen. Zeigen Sie, daß deren Durchschnitt $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha \subset G$ ebenfalls abgeschlossen ist.

**Aufgabe 4.** (i) Sei $G$ eine Gruppe mit der Eigenschaft $\sigma^2 = 1$ für alle $\sigma \in G$. Zeigen Sie, daß $G$ abelsch sein muß, und $G$ in kanonischer Weise ein Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ist.

(ii) Sei nun $\mathbb{Q} \subset L$ ein Zerfällungskörper der Familie aller Polynome der Form $X^2 - a$, $a \in \mathbb{Q}$. Verifizieren Sie, daß $\mathbb{Q} \subset L$ galoisch ist, und daß die Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ die Eigenschaft $\sigma^2 = 1$ für alle $\sigma \in G$ besitzt.

(iii) Zeigen Sie, daß die Anzahl der Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ vom Grad $[E : \mathbb{Q}] = 2$ abzählbar unendlich ist.

(iv) Beweisen Sie, daß die Galois-Gruppe $G$ überabzählbar ist.

(v) Folgern Sie, daß die Anzahl der Untergruppen $H \subset G$ der Galois-Gruppe vom Index $[G : H] = 2$ ebenfalls überabzählbar sein muß.

*Bemerkung:* Dies belegt, daß für unendliche Galois-Erweiterungen die Galois-Korrespondenz $E \mapsto \mathrm{Gal}(L/E)$ und $H \mapsto L^H$ aus Kardinalitätsgründen nicht bijektiv sein kann.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 22.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.