Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = S_3$. Wieviele Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt es, und was für Galois-Gruppen $\mathrm{Gal}(L/E)$ treten dabei auf?

Aufgabe 2. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung, dessen Grad die Form $[L : K] = p^2$ für eine Primzahl $p > 0$ hat. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist isomorph zu C_{p^2} oder $C_p \times C_p$.

(ii) Ist $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq C_{p^2}$, so gibt es genau drei Zwischenkörper $K \subset E \subset L$.

(iii) Ist dagegen $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq C_p \times C_p$, so gibt es genau $p+3$ Zwischenkörper $K \subset E \subset L$.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine endliche abelsche Erweiterung. Mit anderen Worten: $K \subset L$ ist galoisch, und $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist eine endliche abelsche Gruppe.

(i) Verifizieren Sie, daß für jeden Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ die Körpererweiterung $K \subset E$ galoisch ist.

(ii) Sie d ein Teiler des Grades $[L : K]$. Zeigen Sie, daß es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ vom Grad $[E : K] = d$ geben muß.

(iii) Bleibt die Aussage in (ii) für beliebige endlich Galois-Erweiterungen richtig?

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung.

(i) Zeigen Sie, daß es eine Kette von Zwischenkörpern

$$K = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = L$$

gibt so, daß $E_i \subset E_{i+1}$ galoisch ist, und daß die Gruppe $\mathrm{Gal}(E_{i+1}/E_i)$ einfach ist.

(ii) Wir nehmen nun an, daß die Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ bereits einfach ist. Sei $\lambda \in L$, $\lambda \notin K$, und $f \in K[X]$ sein Minimalpolynom. Beweisen Sie, daß $K \subset L$ ein Zerfällungskörper von f ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 29.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.