Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, in dem $1+1=0$ gilt, und $P \subset R$ die Teilmenge aller $a \in R$ mit $a^4 = 0$, sowie $Q \subset R$ die Teilmenge aller $b \in R$ mit $b^2 = 0$. Wir definieren auf $G = P \times Q$ eine Verknüpfung durch

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', aa'^2 + b + b').$$

Rechnen Sie nach, dass die Gruppenaxiome erfüllt sind und zeigen Sie, dass die Teilmenge $H = P \times P$ eine normale Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Untergruppe, welche von den beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

(i) Zeigen Sie, dass die Gruppe G von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = 8$ ist, indem Sie die Matrizenprodukte der Form $A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{n_4}\ldots$ bestimmen.

(ii) Berechnen Sie ABA^{-1} und BAB^{-1}, und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, dass jede Untergruppe $H \subset G$ normal ist.

Bemerkung: Die Gruppe G wird auch als *Quaternionengruppe* bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, und $H \subset G$ eine Untergruppe. Die Teilmengen

$$C_G(H) = \big\{ g \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ für alle } h \in H \big\} ,$$
$$N_G(H) = \big\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \big\} .$$

von G bezeichnet man als *Zentralisator* und *Normalisator* von H. Ist keine Verwechslung zu befürchten, schreibt man auch $C(H)$ und $N(H)$ dafür. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die beiden Teilmengen $C(H), N(H) \subset G$ sind Untergruppen.

(ii) Es gilt $C(H) \subset N(H)$, und die Untergruppe $C(H) \subset N(H)$ ist normal.

(iii) Ist $H \subset G$ normal, so gilt dies auch für $C(H) \subset G$.

(iv) Es gilt $H \subset N(H)$ und die Untergruppe $H \subset N(H)$ ist normal, und $N(H) \subset G$ ist die größte Untergruppe mit dieser Eigenschaft.

Anmerkung: Die Quotientengruppe $W_G(H) = N_G(H)/H$ bezeichnet man als die *Weyl-Gruppe* von $H \subset G$.

Aufgabe 4. Sei G eine Menge, versehen mit einer assoziativen Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$. Angenommen, die folgenden beiden Bedingungen sind erfüllt:

(i) Es gibt ein $e \in G$ mit $ea = a$ für alle $a \in G$.

(ii) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a'a = e$.

Beweisen Sie, daß G dann bereits eine Gruppe sein muß.

Abgabe: Bis Donnerstag, 13.04. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.