Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, und $p_1, \ldots, p_r$ die verschiedenen Primteiler von $n = \operatorname{ord}(G)$. Sei $P_i \subset G$ eine Sylow-p_i-Untergruppe. Verifizieren Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Es gilt $P_i \cap P_j = \{e\}$ für alle $i \neq j$.

(ii) Die Gruppe G wird von der Vereinigungsmenge $P_1 \cup \ldots \cup P_r$ erzeugt.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine normale Untergruppe, $f : G \to G/H$ die kanonische Projektion und $P \subset G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Der Durchschnitt $P \cap H \subset H$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von H.

(ii) Das Bild $f(P) \subset G/H$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von G/H.

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe, $p > 0$ eine Primzahl, $X = \operatorname{Syl}_p(G)$ die Menge aller Sylow-p-Untergruppen, und

$$f : G \longrightarrow S_X, \quad g \longmapsto (P \longmapsto gPg^{-1})$$

der kanonische Homomorphismus. Wir betrachten nun $H = \ker(f)$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Es gilt $H = \bigcap_{P \in X} N_G(P)$.

(ii) Die Unterpruppe $Q = \bigcap_{P \in X} P$ ist eine Sylow-p-Untergruppe von H, und das ist die einzige Sylow-p-Untergruppe in H.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe von Ordnung $n = p^2q^2$, wobei $p < q$ zwei Primzahlen sind. Angenommen, es gilt $n \neq 36$. Beweisen Sie, dass zumindest eine Sylow-Untergruppe von G normal ist, und dass G folglich isomorph zu einem semidirekten Produkt von Sylow-Untergruppen ist.

Anmerkung: Die Aussage stimmt auch für $n = 36$. Wer findet einen Beweis dafür?

Abgabe: Bis Donnerstag, 27.4. um 9:10 h in den Zettelkästen.