Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Seien $m, n \geq 1$ zwei ganze Zahlen, $k = \operatorname{kgV}(m,n)$ ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, und $g = \operatorname{ggT}(m,n)$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Zeigen Sie

$$C_m \times C_n \simeq C_k \times C_g.$$

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen $A = (a_{ij})$, deren Diagonaleinträge konstant eins sind: $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 1$.

(i) Verifizieren Sie, daß $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ eine Sylow-p-Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß die Gruppe H auflösbar ist.

Aufgabe 3. Für $n \geq 1$ sei $\Psi(n)$ die Anzahl der Isomorphieklassen der endlichen abelschen Gruppen von Ordnung $\operatorname{ord}(G) = n$. Es gilt zum Beispiel $\Psi(p) = 1$ für jede Primzahl p.

(i) Berechnen Sie $\Psi(32)$.

(ii) Berechnen Sie $\Psi(1500)$.

(iii) Zeigen Sie, daß die zahlentheoretische Funktion Ψ *multiplikativ* ist, also daß $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$ gilt, wenn a, b relativ prim zueinander sind.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, daß die alternierende Gruppe $A_4 = D^1(S_4)$ isomorph zu einem semidirektem Produkt der Form $\mathbb{F}_2^{\oplus 2} \rtimes_f C_3$ mit einem Homomorphismus $f : C_3 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ ist.

(ii) Sei $x \in C_3$ einer der beiden Erzeuger, und $A = f(x)$ sein Bild in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$. Zeigen Sie, daß die 2×2-Matrix A Spur und Determinante $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 1$ hat und nicht trigonalisierbar ist.

(iii) Bestimmen Sie alle Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$, deren Spur und Determinante gleich eins ist.

(iv) Beweisen Sie, daß $D^1(A_4) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 04.05. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.