Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $\mathfrak{a}$ wird definiert als die Teilmenge $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset R$ aller $x \in R$ mit der Eigenschaft $x^n \in \mathfrak{a}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Es gilt $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(iii) Weiterhin haben wir $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(iv) Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so gilt $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Zeigen Sie, daß die folgenden Teilmengen ebenfalls Ideale sind:

(i) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

(ii) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}, n \geq 0\}$.

(iii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$.

(iv) $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x \in R \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$.

Verifizieren Sie weiterhin die Inklusionen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ für eine ganze Zahl $n \geq 0$ gilt. Wir definieren das *Nilradikal* des Ringes R als die Teilmenge $\mathfrak{a} = \{a \in R \mid a \text{ nilpotent}\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Nilradikal $\mathfrak{a} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Im Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ gibt es außer dem Nullelement keine nilpotenten Elemente.

(iii) Es gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

(iv) Ist $a \in R$ nilpotent, so ist $1 + a \in R$ invertierbar.

(v) Sei nun $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ein Polynom in der Unbestimmten X mit Koeffizienten $a_i \in R$. Zeigen Sie, daß $f \in R[X]$ genau dann nilpotent ist, wenn alle Koeffizienten $a_i \in R$ nilpotent sind.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, und

$$\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

der Ring der stetigen Funktionen. Die Ringstruktur wird dabei punktweise durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

erklärt. Ist $y \in X$ ein Punkt, so definieren wir die Teilmenge $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{C}(X)$ als die Menge aller stetigen Funktionen mit $f(y) = 0$.

(i) Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $\mathfrak{m}_y \subset \mathcal{C}(X)$ ein maximales Ideal ist.

(ii) Zeigen Sie für den topologischen Raum $X = \mathbb{R}$, daß es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}(X)$ geben muß, das nicht von der Form $\mathfrak{m}_x$, $x \in X$ ist.

Tip: Benutzen Sie das Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{C}(X)$ aller Funktionen mit kompaktem Träger.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11.5. um 9:10h in den Zettelkästen.