Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. (i) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, daß $S^{-1}R$ der Nullring ist genau dann, wenn $0 \in S$.

(ii) Was ist die Lokalisierung des Ringes $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bezüglich der multiplikativen Teilmenge $S = \{1, 2, 4\}$?

(iii) Sei $A = R \times R'$ das Produkt von zwei Ringen. Zeigen Sie, daß R isomorph zu einer Lokalisierung von A ist.

(iv) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, und $T \subset R$ die Menge aller $t \in R$ mit der Eigenschaft $t^n \in S$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Verifizieren Sie, daß die Teilmenge $T \subset R$ multiplikativ ist, und daß der kanonische Homomorphismus $f : S^{-1}R \to T^{-1}R$, $a/s \mapsto a/s$ bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und U, V, X, Y, Z Unbestimmte. Wir betrachten den Unterring $A = K[U^2, UV, V^2] \subset K[U, V]$ sowie den Restklassenring $R = K[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$.

(i) Konstruieren Sie mittels der universellen Eigenschaft des Polynomringes einen bijektiven Homomorphismus $R \to A$.

(ii) Beweisen Sie, daß der Ring A nicht faktoriell sind.

Aufgabe 3. Sei R ein integrer Ring.

(i) Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge, und $p \in R$ ein Primelement. Zeigen Sie, daß der Bruch $p/1 \in S^{-1}R$ entweder invertierbar oder prim ist.

(ii) Wir betrachten nun die Teilmenge

$$S = \{a \in R \mid a \text{ ist nicht Produkt von Primelementen}\} \cup \{1\}\,.$$

Beweisen Sie, daß $S \subset R$ multiplikativ ist, und daß die Lokalisierung $S^{-1}R$ faktoriell ist.

Aufgabe 4. Sei R ein euklidischer Ring, und $\varphi : R \to \mathbb{N}$ eine euklidische Funktion. Für eine formale Laurent-Reihe $f = \sum_{i \geq n} \lambda_i X^i$, $\lambda_i \in R$, $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\delta(f) = \begin{cases} \varphi(\lambda_n) & \text{wenn } \lambda_n \neq 0, \\ 0 & \text{wenn } f = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß der Ring der formalen Laurent-Reihen $A = R[[X]][X^{-1}]$ euklidisch bezüglich der Funktion $\delta : A \to \mathbb{N}$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 18.5. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.