Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2006

# Übungen zur Einführung in die Algebra

## Blatt 8

**Aufgabe 1.** (i) Wir betrachten das Polynom $f = X^4 + 5X^2 + 2$. Verifizieren Sie, daß $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, etwa mit dem Reduktionskriterium für die Primzahl $p = 3$.

(ii) Das Polynom $f$ liefert also einen Körper $L = \mathbb{Q}[X]/(f)$. Sei $\lambda \in L$ die Restklasse der Unbestimmten $X \in \mathbb{Q}[X]$. Dann bilden die Potenzen $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \in L$ eine Vektorraumbasis über $\mathbb{Q}$. Stellen Sie das Produkt

$$(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3) \cdot (\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + 1) \in L$$

als Linearkombination der obigen Vektorraumbasis da.

*Anmerkung:* Endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ werden auch als *Zahlkörper* bezeichnet. Zahlkörper sind Gegenstand der *Algebraischen Zahlentheorie* und spielen in der *Arithmetischen Geometrie* eine wichtige Rolle.

**Aufgabe 2.** (i) Sei $R$ ein euklidischer Ring und $a, b \in R$. Zeigen Sie, daß mit dem euklidischen Algorithmus ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b$ in der Form $g = ra + sb$ berechnet werden kann.

(ii) Sei $f = X^4 - 2X^2 + 2$. Zeigen Sie, daß $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(iii) Sei $h = X^3 + 3X + 1$. Verifizieren Sie, daß das Einselement $1 \in \mathbb{Q}[X]$ ein größter gemeinsamer Teiler von $f, h$ ist.

(iv) Wir betrachten den Zahlkörper $L = \mathbb{Q}[X]/(f)$. Sei $\lambda \in L$ die Restklasse der Unbestimmten $X \in \mathbb{Q}[X]$. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $h(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda + 1 \in L$, indem Sie mit dem Euklidischen Algorithmus eine Darstellung $1 = rf + sh$ bestimmen.

**Aufgabe 3.** Sei $K \subsetneq L$ eine nichttriviale Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß die $K$-Algebra $A = L \otimes_K L$ kein Körper ist.

*Tip:* Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $A \to L$, $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda\mu$.

**Aufgabe 4.** (i) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, und $\lambda, \mu \in L$ zwei algebraische Elemente. Wir bilden die $K$-Algebra $A = K(\lambda) \otimes K(\mu)$ und betrachten die $K$-lineare Abbildung

$$h : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto (\lambda \otimes 1 + 1 \otimes \mu)x.$$

Zeigen Sie mit dem Satz von Cayley–Hamilton, daß das Minimalpolynom $f \in K[X]$ von der Summe $\lambda + \mu \in L$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_h \in K[X]$ von $h \in \mathrm{End}_K(A)$ ist.

Wir betrachten nun als Beispiel die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ und die algebraischen Elemente $\lambda = \sqrt{2}, \mu = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

(ii) Geben Sie die Minimalpolynome von $\sqrt{2}, e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$ an, und berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_h \in \mathbb{Q}[X]$ von $h \in \mathrm{End}_K(A)$.

(iii) Bestimmen Sie daraus das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, 8.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.