Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2006

Übungen zur Einführung in die Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung, der Grad ist also $[L : K] = 2$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Wenn K von Charakteristik $p \neq 2$ ist, so ist $K \subset L$ separabel, und von der Form $L \simeq K[X]/(X^2 + b)$ für ein $b \in K$.

(ii) Wenn K von Charakteristik $p = 2$ ist, so ist $K \subset L$ von der Form $L \simeq K[X]/(X^2 + aX + b)$ für gewisse $a, b \in K$. Die Körpererweiterung $K \subset L$ ist separabel genau dann, wenn $a \neq 0$.

(iii) Für den endlichen Körper $K = \mathbb{F}_2$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine quadratische Körpererweiterung. Man bezeichnet diesen Körper mit $L = \mathbb{F}_4$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die reellen Zahlen $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{x}$ und definieren die Körper $E = \mathbb{Q}(x)$ und $L = E(y)$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die beiden Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset E$ und $E \subset L$ normal sind, aber daß die Verkettung $\mathbb{Q} \subset L$ nicht normal ist.

Aufgabe 3. (i) Sei $K \subset L$ ein eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß jeder Homomorphismus von K-Algebren $f : L \to L$ bijektiv ist.

(ii) Gilt die entsprechende Aussage auch für algebraische Körpererweiterungen $K \subset L$?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, und $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung, und $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluß. Ein Element $\lambda \in L$ heißt *rein inseparabel* über K, wenn das Minimalpolynom $f \in K[X]$ über Ω nur eine Wurzel (mit entsprechender Multiplizität) besitzt.

(i) Zeigen Sie, daß für rein inseparable $\lambda \in L$ das Minimalpolynom von der Form $f = X^{p^e} - a$ für ein $a \in K$ und ein natürliche Zahl $e \geq 0$ ist.

(ii) Beweisen Sie, daß jedes $\lambda \in L$ rein inseparabel über dem separablen Abschluß $L_s = \{\lambda \in L \mid \lambda \text{ ist separabel über } K\}$ ist.

Abgabe: Bis Freitag, 16.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen. Blatt 10 wird dann in der Übungsgruppe ausgeteilt.

Antrittsvorlesung: Am Dienstag, den 13.6. um 16 Uhr ct. findet im Hörsaal 5H meine Antrittsvorlesung zum Thema

Konfigurationsräume von Punkten auf abelschen Varietäten

statt. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.