Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1. (i) Sei R ein Ring, und $f \in R$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Spec}(R) = D(f) \cup D(1-f)$ gilt.

(ii) Sei nun R ein Hauptidealring. Verifizieren sie, daß alle offenen Teilmengen $U \subset \operatorname{Spec}(R)$ von der Form $U = D(f)$ für ein $f \in R$ sind.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Wir betrachten die Lokalisierung $R' = S^{-1}R$ und die Lokalisierungsabbildung $\varphi : R \to R'$, $f \mapsto f/1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, so gilt $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}R')$.

(ii) Ist $\mathfrak{p}' \subset R'$ ein Primidal, so gilt $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')R'$.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Endomorphismus von Ringen

$$\varphi : \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T], \quad T \longmapsto T^2 + 1.$$

Beschreiben sie die induzierte stetige Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$$

auf dem Spektrum, indem sie die Bilder der Punkte η und x_z, $z \in \mathbb{C}$ angeben. Zur Erinnerung: $\mathfrak{p}_\eta = 0$ und $\mathfrak{p}_{x_z} = (T - z)$.

Aufgabe 4. Bekanntlich sind Polynomringe über Körpern euklidisch, insbesondere Hauptidealringe und faktoriell. Wir betrachten hier die Inklusion $\varphi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{C}[T]$ der Polynomringe über den reellen bzw. komplexen Zahlen.

(i) Zeigen Sie, daß die irreduzible Polynome $g \in \mathbb{R}[T]$ genau die von der Form $g = T - r$ mit $r \in \mathbb{R}$, und $g = (T - z)(T - \bar{z})$ mit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ sind.

(ii) Geben Sie alle Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}[T]$ an.

(iii) Skizzieren Sie $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T])$ und die offenen Mengen der Zariski-Topologie.

(iv) Wir betrachten die induzierte stetige Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T]).$$

Geben Sie zu jedem Punkt $x \in \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$ das Bild an. Ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(\varphi)$ injektiv oder surjektiv?

Abgabe: Bis Montag, den 30.10. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.