Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 12

Aufgabe 1. (i) Sei X ein geringter Raum und $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang $n \geq 0$. Beweisen Sie, daß $\mathcal{E}$ isomorph zu seinem bidualen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ ist.

(ii) Muß $\mathcal{E}$ isomorph zu seinem dualen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}^{\vee} = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ sein?

Aufgabe 2. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduierter Ring, der integer ist. Zeigen Sie, daß das Schema $\operatorname{Proj}(S)$ ebenfalls integer ist.

Aufgabe 3. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein noetherscher graduierter Ring. Zeigen Sie, daß das Schema $\operatorname{Proj}(S)$ genau dann leer ist, wenn das irrelevante Ideal $S_+ \subset S$ nilpotent ist.

Aufgabe 4. (i) Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduierter Ring, und $f \in S_+$ ein homogenes Element vom Grad $d > 0$. Zeigen Sie, daß der d-te Veronese-Unterring

$$(R_f)^{(d)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (R_f)_{md}$$

isomorph zum Ring der Laurent-Polynome mit Koeffizienten in $R_{(f)}$ ist.

(ii) Was bedeutet dies anschaulich für den kanonischen Morphismus von Schemata $\operatorname{Spec}(S) \setminus V(S_+) \to \operatorname{Proj}(S)$?

Abgabe: Bis Montag, den 29.1. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.