Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{x \in \operatorname{Spec}(R)} \kappa(x), \quad f \longmapsto (f(x))_{x \in \operatorname{Spec}(R)}.$$

Zeigen Sie, daß der Kern von φ das Radikal $\operatorname{Rad}(R) = \{f \in R \mid f \text{ nilpotent}\}$ ist.

Anmerkung: Läßt man das Produkt der Restekörper $\kappa(x)$ nur über die abgeschlossenen Punkte laufen, so erhält man als Kern das sogenannte *Jacobson-Radikal.*

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Elemente $e \in R$ mit $e^2 = e$ bezeichnet man als *idempotent.*

(i) Sei $e \in R$ idempotent. Verifizieren Sie, daß dann auch $1 - e \in R$ idempotent ist, und daß $e(1-e) = 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, daß $D(e) = V(1-e)$ als Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ für alle Idempotente $e \in R$ gilt. Insbesondere sind diese Teilmengen gleichzeitig offen und abgeschlossen.

(iii) Deduzieren Sie, daß der topologische Raum $\operatorname{Spec}(R)$ nicht zusammenhängend ist, falls es eine Zerlegung $R = R_1 \times R_2$ in ein Produkt von zwei Ringen $R_1, R_2 \neq 0$ gibt.

Aufgabe 3. Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots$ stationär wird, also $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \ldots$ ab einem Index $n \geq 1$. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede aufsteigende Kette von offenen Teilmengen $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ stationär wird.

(i) Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, daß dann auch der topologische Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ noethersch ist.

(ii) Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 4. Seien $(A, \mathfrak{m})$ und $(A', \mathfrak{m}')$ zwei lokale Ringe; mit anderen Worten, $\mathfrak{m} \subset A$ und $\mathfrak{m}' \subset A'$ sind die einzigen maximalen Ideale. Sei $\varphi : A \to A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Verifizieren Sie, daß die folgenden sechs Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$.

(ii) $\mathfrak{m} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$.

(iii) $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$.

(iv) $A^\times = \varphi^{-1}(A'^\times)$.

(v) Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A'$ induziert eine Körpererweiterung zwischen den Restekörper $A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m}'$.

(vi) Der abgeschlossene Punkt $x' \in \operatorname{Spec}(A')$ wird von der Abbildung $\operatorname{Spec}(\varphi)$ auf den abgeschlossenen Punkt $x \in \operatorname{Spec}(A)$ abgebildet.

Bemerkung: Ringhomomorphismen zwischen lokalen Ringen, welche die obigen äquivalenten Bedingungen erfüllen, bezeichnet man als *lokal*.

Abgabe: Bis Montag, den 6.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.