Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ bezeichnet man als *leer*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum X leer ist. Zeigen sie: Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist leer genau dann, wenn der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ der Nullring ist.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ sei $\mathcal{F}(U) \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ die Teilmenge der lokalen Schnitte $e \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, die idempotent sind, also $e^2 = e$ erfüllen.

(i) Verifizieren Sie, daß für alle Inklusionen $U \subset V$ die Restriktionsabbildung res_U^V der Garbe $\mathcal{O}_X$ die Teilmenge $\mathcal{F}(V)$ in die Teilmenge $\mathcal{F}(U)$ abbildet.

(ii) Zeigen Sie, daß die so definierte Prägarbe $\mathcal{F}$ eine Garbe ist.

Aufgabe 3. Ein Ring R bezeichnet man als *reduziert*, wenn sein Radikal $\mathrm{Rad}(R) = \sqrt{0}$ das Nullideal ist. Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Beweisen Sie, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ so, daß die Ringe der lokalen Schnitte $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ reduziert sind.

(ii) Für jede offen Teilmenge $U \subset X$ ist der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert.

Schemata mit diesen äquivalenten Eigenschaften bezeichnet man als *reduziert*. Gilt die entsprechende Äquivalenz zwischen (i) und (ii), wenn die Eigenschaft ,,reduziert" durch die Eigenschaft ,,integer" ersetzt wird?

Aufgabe 4. Konstruieren Sie ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$, das nichtreduziert ist, aber dessen Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.

Tip: Modifizieren sie die Konstruktion der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_k$ aus der Vorlesung, indem sie statt dem Ring der Laurent-Polynome $k[T, T^{-1}]$ den nichtreduzierten Ring $k[\epsilon, T, T^{-1}]/(\epsilon^2)$ verwenden.

Abgabe: Bis Montag, den 13.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.