Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, daß der Ring der formalen Potenzreihen $k[[T]]$ ein lokaler Ring ist, mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (T)$.

Aufgabe 2. (i) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Verifizieren Sie, daß $(g \circ f)_*(\mathcal{F}) = g_*(f_*(\mathcal{F}))$ gilt.

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß jeder Morphismus von Garben $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ auf X einen Morphismus $f_*(\psi) : f_*(\mathcal{F}) \to f_*(\mathcal{G})$ zwischen den direkten Bildgarben auf Y induziert.

(iii) Benutzen sie das Vorangegangene, um in der Kategorie der geringten Räume die Verkettung von Morphismen $(g, \theta) \circ (f, \psi)$ explizit zu beschreiben.

Aufgabe 3. Sei $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ und $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie alle Morphism von geringten Räumen $f : X \to Y$. Welche davon sind Morphismen von Schemata?

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Wir benutzen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & k[T,T^{-1}] & \\ k[T] \arrow[ur] & & k[T] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

von Ringen, um in Analogie zur projektiven Geraden durch Verkleben ein Schema $X = U \cup V$ zu definieren. Hier gilt also

$$U = \mathrm{Spec}(k[T]), \quad V = \mathrm{Spec}(k[T]), \quad \text{und} \quad U \cap V = \mathrm{Spec}(k[T,T^{-1}]).$$

(i) Skizzieren Sie den topologischen Raum X.

(ii) Zeigen Sie, daß der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[T]$ ist.

(iii) Folgern Sie daraus, daß das Schema X nicht isomorph zur projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_k$ ist.

(iv) Beweisen Sie, daß das Schema X nicht affin ist. Tip: Konstruieren Sie einen Automorphismus von X, der die Identität auf den globalen Schnitten induziert, um zu zeigen, daß die kanonische Abbilung

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}}(X, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

nicht bijektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 20.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.