Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, $U \subset X$ ein offenes Unterschema, sowie $i : U \to X$ der Inklusionsmorphismus. Zeigen Sie, daß für alle Punkte $x \in U$ die induzierte Abbildung zwischen den Halmen $\psi_x : \mathcal{O}_{X,i(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, $f \in R$ ein Element, und $D(f) \subset \operatorname{Spec}(R)$ die zugehörige offene Teilmenge.

(i) Sei $g \in R$ ein Element mit $D(g) \subset D(f)$. Zeigen Sie, daß die Ringe R_g und $(R_f)_{g/1}$ isomorph sind.

(ii) Folgern Sie, daß die Einschränkung der Strukturgarbe $\widetilde{R}$ auf die offene Teilmenge $D(f) \simeq \operatorname{Spec}(R_f)$ isomorph zur Strukturgarbe $\widetilde{R_f}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Q} \subset E$ ein quadratischer Zahlkörper und $X = \operatorname{Spec}(E)$ sein Spektrum.

(i) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Ringen $E \otimes_{\mathbb{Q}} E \to E \times E$.

(ii) Folgern Sie, daß das Faserprodukt $X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})} X$ aus zwei Punkten besteht.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, und $k \subset k'$ eine Körpererweiterung.

(i) Sei X ein k-Schema. Zeigen Sie, daß X leer ist genau dann, wenn das Faserprodukt $X \otimes_k k' = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k')$ leer ist.

(ii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von k-Schemata. Beweisen Sie, daß die Abbildung f surjektiv ist genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f' : X \otimes_k k' \to Y \otimes_k k'$ surjektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 27.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Klausur: Am Montag, den 5.2.07 um 9:00 Uhr st im Hörsaal 5G.
Erlaubte Hilfsmittel: Ihre Vorlesungsmitschrift.