Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

# Übungen zu Algebraische Geometrie I

## Blatt 6

**Aufgabe 1.** Sei $k$ ein Grundkörper. Die Inklusion der Ringe $k[T_1] \subset k[T_1, T_2]$ liefert einen Morphismus von Schemata $f : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$. Sei $\eta \in \mathbb{A}^1_k$ der generische Punkt. Zeigen Sie, daß die schematische Faser $f^{-1}(\eta)$ isomorph zur affinen Gerade $\mathbb{A}^1_L$ über dem Körper $L = k(T_1)$ der rationalen Funktionen ist.

**Aufgabe 2.** Sei $X$ ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{I}^s \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von abelschen Garben auf $X$. Die Garben $\mathcal{I}^1, \ldots, \mathcal{I}^s$ seien injektiv. Zeigen Sie, daß $H^r(X, \mathcal{G}) \simeq H^{r+s}(X, \mathcal{F})$ für $r \geq 1$ gilt.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ ein diskreter Raum (das heißt, jede Teilmenge $U \subset X$ ist offen). Zeigen Sie, daß $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle abelschen Garben $\mathcal{F}$ und alle $r \geq 1$.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf $X$, und $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \dots$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$. Wir betrachten nun eine weitere Auflösung $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \dots$ von $\mathcal{F}$, wobei hier die $\mathcal{C}^i$ beliebige abelsche Garben sind. Beweisen Sie, daß es Homomorphismen $\varphi_i : \mathcal{C}^i \to \mathcal{I}^i$ gibt so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_1}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ ist.

**Abgabe:** Bis Montag, den 4.12. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.