Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

# Übungen zu Algebraische Geometrie I

## Blatt 7

**Aufgabe 1.** Sei $X$ ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben. Angenommen, die induzierte Abbildung $H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F})$ ist injektiv. Folgern Sie, daß jeder globale Schnitt von $\mathcal{F}''$ das Bild eines globalen Schnittes von $\mathcal{F}$ ist.

**Aufgabe 2.** Sei $X$ ein topologischer Raum.

(i) Seien $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ zwei injektive Garben auf $X$. Zeigen Sie, daß die Summe $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}'$ ebenfalls injektiv ist.

(ii) Folgern Sie daraus, daß $H^r(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') \simeq H^r(X, \mathcal{F}) \oplus H^r(X, \mathcal{F}')$ für alle abelschen Garben $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ auf $X$ gilt.

**Aufgabe 3.** Sei $k$ ein Grundkörper. Wir definieren durch Verklebung ein $k$-Schema $X = U_1 \cup U_2$, wobei

$$U_1 = \operatorname{Spec}(k[T^2, T^3]), \quad U_2 = \operatorname{Spec}(k[T^{-2}, T^{-3}]), \quad U_1 \cap U_2 = \operatorname{Spec}(k[T^{\pm 1}]).$$

Berechnen Sie die Kohomologiegruppen $H^r(X, \mathcal{O}_X)$, $r \geq 0$.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ das $k$-Schema aus Aufgabe 3. Wir betrachten den $k[T^2, T^3]$-Modul $M_1 = k[T^2, T^3]T^{-1} \subset k[T^{\pm 1}]$ und den $k[T^{-2}, T^{-3}]$-Modul $M_2 = k[T^{-2}, T^{-3}]T \subset k[T^{\pm 1}]$. Durch Verklebung erhalten wir eine abelsche Garbe $\mathcal{L}$ auf $X$ mit

$$\mathcal{L}|_{U_1} = \widetilde{M_1} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}|_{U_2} = \widetilde{M_2}.$$

Berechnen Sie die Kohomologiegruppen $H^r(X, \mathcal{L})$, $r \geq 0$.

**Abgabe:** Bis Montag, den 11.12. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.