Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \mathcal{F}_4 \longrightarrow \mathcal{F}_5 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Angenommen, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ sind quasikohärent. Zeigen Sie, daß dann auch $\mathcal{F}_3$ quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Sei X Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeigen Sie, daß die beiden abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ und $\Gamma(X, \mathcal{F})$ kanonisch isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema, und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für jede affine offene Teilmenge $U \subset X$ ist $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$ für einen Modul M über dem Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

(ii) Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup U_\alpha$ so, daß $\mathcal{F}|_{U_\alpha} \simeq \widetilde{M}_\alpha$ für einen Modul M_α über dem Ring $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$.

Aufgabe 4. Sei X ein quasikompaktes Schema. Angenommen, der Durchschnitt von je zwei affinen offenen Teilmengen ist wieder affin. Zeigen Sie, daß es eine natürliche Zahl $n \geq 0$ gibt so, daß $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle quasikohärenten Garben $\mathcal{F}$ und alle natürlichen Zahlen $r \geq n$ gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 18.12.06 um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.