Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Einbettungen von Schemata. Zeigen Sie, daß die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine Einbettung ist.

Aufgabe 2. (i) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß X Hausdorff ist genau dann, wenn die Teilmenge $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

(ii) Sei $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$. Beschreiben Sie das Schema $X \times_S X$ und das abgeschlossene Unterschema $\Delta_{X/S} \subset X \times_S X$.

(iii) Sei S ein Schema und X ein S-Schema. Angenommen, ein Punkt $z \in X \times_S X$ hat die Eigenschaft $\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z)$. Gilt dann notwendigerweise $z \in \Delta_{X/S}$?

Aufgabe 3. Sei X ein Schema, und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Angenommen, $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_3$ sind quasikohärent. Beweisen Sie explizit, daß dann auch $\mathcal{F}_2$ quasikohärent ist.

Tip: Reduzieren Sie auf den Fall, daß X affin ist; wenden Sie dann Serres Verschwindungsatz auf $H^1(X, \mathcal{F}_1)$ und das Fünferlemma mit den Abbildungen $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}_i)} \to \mathcal{F}_i$ an.

Aufgabe 4. Sei X ein noethersches Schema. Ist dann das Schema $X \times X$ ebenfalls noethersch?

Abgabe: Bis Montag, den 8.1. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!