Arch. Math., Vol. 44, 138–146 (1985)

0003-889X/85/4402-0138 $ 3.30/0

Zur Brauer-Thrall-Vermutung für Ringe

Von

Robert Wisbauer

Nehmen wir für einen assoziativen Ring R folgende Aussagen:

(a) ${}_R R$ ist von endlichem Darstellungstyp;
(b) ${}_R R$ ist von beschränktem Darstellungstyp;
(c) ${}_R R$ und R_R sind rein-halbeinfach.

Die Äquivalenz von (a) und (b) ist Gegenstand der (ersten) *Brauer-Thrall-Vermutung für Ringe*, die von (a) und (c) ist eng damit verknüpft. Eine ausführliche Darstellung zur Entstehung und Bearbeitung davon findet man in Ringel [9]. Nun, die Vermutung ist seit langem bestätigt: Aus Theorem (3.1) in Auslander [1] folgt (a) $\Leftrightarrow$ (b), während man (a) $\Leftrightarrow$ (c) z. B. aus Théorème (10.10) in Gruson-Jensen [6] kennt. Diese Beweise – und auch andere Varianten davon, die sich in der Literatur finden – machen ausführliche kategorielle Vorbereitungen notwendig und kommen nicht ohne einen gewissen technischen Aufwand aus.

In der vorliegenden Arbeit wird der Beweis der Brauer-Thrall-Vermutung in doppelter Hinsicht vereinfacht: Zum einen werden nur elementare Methoden aus der Modultheorie verwendet, zum anderen wird der komplizierte Teil des Beweises von Theorem (3.1) in Auslander [1] durch ein unkompliziertes Argument ersetzt (Lemma (2.2)). Die „Rückführung" der kategoriellen Methoden auf die Modultheorie wird erreicht durch den Funktor $\widehat{\mathrm{Hom}}\,(U, -)$ nach Fuller [4], der eine Verbindung zwischen R-MOD und dem *Funktorring* T der *endlich präsentierten* R-Moduln herstellt. Die dabei auftretenden T-Moduln bilden gerade die Kategorie $\sigma\,[{}_T T]$ der von T (sub) erzeugten T-Moduln, und wir haben daher die Ergebnisse aus Wisbauer [11] über solche Moduln zur Verfügung. Aus anderen Arbeiten werden nur Sätze verwendet, die ebenfalls elementare modultheoretische Beweise erlauben.

In Abschnitt 1 stellen wir die Grundlagen zusammen, die sicher auch für andere Anwendungen von Interesse sind. Der Abschnitt 2 enthält Aussagen über rein-halbeinfache Ringe, und im letzten Teil zeigen wir, daß die Aussagen (a), (b), (c) unter anderem äquivalent sind zu

(d) ${}_T T$ ist lokal artinsch und noethersch;
(e) T_T ist lokal artinsch und noethersch.

Wir erhalten dabei für eine Reihe von bekannten Ergebnissen neue Beweise.

1. Grundlagen. Sei R ein assoziativer Ring mit Einselement und R-MOD (bzw. MOD-R) die Kategorie der unitären R-Links- (bzw. Rechts-) Moduln. Morphismen werden auf die den Skalaren gegenüberliegende Seite der Moduln geschrieben.

Wir wählen ein Repräsentantensystem $\{U_i\}_{i\in I}$ der endlich präsentierten R-Linksmoduln und definieren für $U = \bigoplus_{i\in I} U_i$ und $N \in R$-MOD (vgl. Fuller [4]):

$$\hat{\mathrm{Hom}}(U, N) := \{f : U \to N \mid (U_i) f = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Den Ring $T := \hat{\mathrm{End}}(U) = \hat{\mathrm{Hom}}(U, U)$ nennt man den *Funktorring* (*der endlich präsentierten Moduln*) von R-MOD. T ist ein Ring ohne Eins, aber *mit genügend vielen Idempotenten*, da die kanonischen Projektionen $\pi_j : U \to U_j$ und Injektionen $\varepsilon_j : U_j \to U$ eine Familie von Idempotenten $e_j = \pi_j \varepsilon_j \in T$ darstellen, für die gilt

$$T = \bigoplus_{i\in I} T e_i = \bigoplus_{i\in I} e_i T.$$

(1.1) Bilden wir den Unterring $L(T)$ von $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(T)$, der von den Linksmultiplikationen mit Elementen aus T und der Identität erzeugt wird. Dann ist T ein Linksmodul über $L(T)$ und die Linksideale von T sind gerade die $L(T)$-Untermoduln von T. Bezeichne $\sigma[{}_T T]$ die volle Unterkategorie von $L(T)$-MOD, die aus den Untermoduln von T-erzeugten Moduln besteht (Wisbauer [11]). Aus der Existenz von genügend vielen Idempotenten in T folgt, daß T ein projektiver Generator in $\sigma[{}_T T]$ ist, d. h. jeder Modul $X \in \sigma[{}_T T]$ ist T-erzeugt, es gilt $X = TX$.

Analog zu den Ausführungen in Fuller [4], [5] erhält man, daß damit $\sigma[{}_T T]$ äquivalent zur Kategorie der kontravarianten Funktoren von den endlich präsentierten R-Linksmoduln in die abelschen Gruppen ist.

Entsprechend läßt sich die Kategorie $\sigma[T_T]$ bilden, die T-Rechtsmoduln Y mit $Y = YT$, die zur Kategorie der kovarianten Funktoren von den endlich präsentierten R-Linksmoduln in die abelschen Gruppen äquivalent ist. Wir werden diese Festlegungen im folgenden unverändert lassen.

(1.2) Den R-Modul U kann man in kanonischer Weise als T-Rechtsmodul auffassen. Für das Idempotent $e_R : U \to R \to U$ gilt $U_T \cong \mathrm{Hom}_R(R, U) \cong e_R T$ und somit ist U_T ein endlich erzeugter, projektiver Modul in $\sigma[T_T]$.

Für jedes Idempotent $e \in T$ ist $U e$ endlich erzeugter R-Modul. Aus einer exakten Folge $R^k \to U e \to 0$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir mit dem Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, U)$

$$e T \cong \mathrm{Hom}_R(U e, U) \subset \mathrm{Hom}_R(R^k, U) \cong U_T^k.$$

Somit ist auch $T = \bigoplus_{i\in I} e_i T$ in der von U_T suberzeugten Kategorie $\sigma[U_T]$ enthalten, das bedeutet $\sigma[U_T] = \sigma[T_T]$.

(1.3) Für jedes $N \in R$-MOD ist $\hat{\mathrm{Hom}}(U, N)$ ein T-Modul aus $\sigma[{}_T T]$ und wir haben die Funktoren (vgl. Fuller [4])

$$\hat{\mathrm{Hom}}_R(U, -) : R\text{-MOD} \to \sigma[{}_T T]$$

$$U \oplus_T - : \sigma[{}_T T] \to R\text{-MOD}$$

und natürliche Homomorphismen

$$\nu_N : U \otimes \widehat{\mathrm{Hom}}_R(U, N) \to N, \qquad u \otimes \varphi \to (u)\varphi$$

$$\eta_X : X \to \widehat{\mathrm{Hom}}_R(U, U \otimes {}_T X), \qquad x \to [u \to u \otimes x] \quad \text{für} \quad X \in \sigma[{}_T T].$$

Beide Funktoren sind mit direkten Limites vertauschbar und ein Modul $X \in \sigma[{}_T T]$ ist genau dann *flach*, wenn $X \cong \widehat{\mathrm{Hom}}_R(U, L)$ für ein $L \in R$-MOD ist. Da U Generator ist in R-MOD, ist ν_N für alle $N \in R$-MOD Isomorphismus und daraus folgt, daß η_X für alle flachen $X \in \sigma[{}_T T]$ Isomorphismus ist.

Eine kurze exakte Folge in R-MOD ist genau dann *rein*, wenn sie unter $\widehat{\mathrm{Hom}}(U, -)$ exakt bleibt. $L \in R$-MOD ist genau dann *rein-projektiv*, wenn $\widehat{\mathrm{Hom}}(U, L)$ projektiv in $\sigma[{}_T T]$ ist.

(1.4) $U^* := \widehat{\mathrm{Hom}}(U, R) \cong T e_R$ (e_R wie in (1.2)) ist ein endlich erzeugter, projektiver Modul aus $\sigma[{}_T T]$, der sich auch als R-Rechtsmodul auffassen läßt. Dies gibt uns die Funktoren

$$- \otimes_R U_T : \text{MOD-}R \to \sigma[T_T]$$

$$- \otimes_T U_R^* : \sigma[T_T] \to \text{MOD-}R.$$

Mit dem Isomorphismus $\nu_R : U \otimes_T U^* \to R$,
und dem Homomorphismus

$$\mu : U^* \otimes_R U \to T, \qquad \varphi \otimes u \to (\ )\varphi u$$

erhalten wir die natürlichen Homomorphismen

$$\lambda_M : M \otimes_R U \otimes_T U_R^* \to M \otimes_R R \cong M \quad \text{für} \quad M \in \text{MOD-}R$$

$$\mu_Y : Y \otimes_T U^* \otimes_R U_T \to Y \otimes_T T \cong Y \quad \text{für} \quad Y \in \sigma[T_T].$$

Dabei ist λ_M immer ein Isomorphismus und aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} U \otimes_T U^* \otimes_R U \arrow[d, "\lambda_R \otimes id"'] \arrow[dr, "\mu_U"] & \\ R \otimes_R U \arrow[r, phantom, "\cong"] & U \end{tikzcd}$$

folgt, daß μ_U ebenfalls ein Isomorphismus ist.

(1.4.1) Eine kurze exakte Folge in MOD-R ist genau dann rein,wenn sie unter $-{}_R\otimes U$ in eine exakte Folge in $\sigma[T_T]$ übergeht, die dann ebenfalls rein ist. Rein-exakte Folgen in $\sigma[T_T]$ werden unter $-{}_T\otimes U^*$ zu rein-exakten Folgen in MOD-R.

(1.4.2) Für einen Modul $Y_T \in \sigma[T_T]$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Y_T ist absolut rein in $\sigma[T_T]$;

(b) Y_T ist schwach T-injektiv, d. h. injektiv bzgl. der exakten Folgen $0 \to X_T \to T^{(\mathbb{N})}$ mit endlich erzeugten $X_T \in \sigma[T_T]$;

(c) Y_T ist reiner Untermodul eines (schwach T-) injektiven Moduls aus $\sigma[T_T]$;

(d) $Y_T \cong M \otimes_R U_T$ für ein $M \in$ MOD-R.

Beweis. Die Äquivalenz von (a), (b) und (c) folgt aus Satz (1.2) und (1.4) in Wisbauer [11].

(b) $\Rightarrow$ (d) Sei Y_T schwach T-injektiv. Aus der Isomorphie $\mathrm{Hom}_T(\mathrm{Hom}_R(R, U), Y) \cong \mathrm{Hom}_T(U, Y) \otimes_R R$ erhält man für alle endlich präsentierten $U_i \in R$-MOD die Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_T(U, Y) \otimes U_i \cong \mathrm{Hom}_T(\mathrm{Hom}_R(U_i, U), Y).$$

Daraus erhält man durch Summenbildung mit $U = \bigoplus_{\iota \in I} U_i$

$$\mathrm{Hom}_T(U, Y) \otimes_R U \cong \widehat{\mathrm{Hom}}_T(\widehat{\mathrm{Hom}}_R(\oplus U_\iota, U), Y)$$
$$\cong \widehat{\mathrm{Hom}}_T(T, Y) \cong Y.$$

(d) $\Rightarrow$ (c) Für jeden Modul $K \otimes_R U_T$, $K \in$ MOD-R, gibt es eine exakte Folge

$$(*)\ 0 \to K \otimes_R U_T \to N \otimes_R U_T$$

mit

$$N \in \text{MOD-}R \quad \text{und} \quad N \otimes U_T \quad \text{injektiv.}$$

Durch Anwendung von $- \otimes_T U^*$ erhalten wir daraus die exakte Folge

$$0 \to K \otimes_R U_T \otimes_T U^* \to N \otimes_R U \otimes_T U^*.$$

Dies ist eine reine Folge in MOD-R, da sie durch $- \otimes_R U$ in eine zu (*) isomorphe Folge übergeführt wird. Damit ist aber (*) selbst auch eine reine Folge und $K \otimes_R U_T$ reiner Untermodul eines injektiven Moduls aus $\sigma[T_T]$.

(1.4.3) Als Folgerung aus dem eben Gezeigten ergibt sich, daß ein Modul $N \in$ MOD-R genau dann *rein-injektiv* ist, wenn $N \otimes U_T$ injektiv in $\sigma[T_T]$ ist.

(1.5) Die schwache globale Dimension von $\sigma[{}_TT]$ ist ≤ 2. Dies sieht man analog zum Beweis von Proposition (1.5) in Fuller-Hullinger [5].

(1.6) Für den Funktorring T sind folgende Aussagen äquivalent (vgl. Satz (1.5) in Wisbauer [11])

(a) ${}_TT$ ist ein lokal noetherscher Modul;
(b) jeder endlich erzeugte Modul in $\sigma[{}_TT]$ ist noethersch;
(c) jeder absolut reine Modul in $\sigma[{}_TT]$ ist injektiv.

Mit Hilfe dieser Kennzeichnungen läßt sich zeigen:

(1.7) Gilt (i) jeder einfache Modul in $\sigma[{}_TT]$ ist endlich präsentiert,
(ii) jeder Modul aus $\sigma[{}_TT]$ enthält einen einfachen Untermodul,
dann ist ${}_TT$ lokal noethersch.

Beweis. Wir zeigen, daß jeder absolut reine Modul ${}_TX$ in $\sigma[{}_TT]$ injektiv ist. Angenommen für die injektive Hülle $\hat{X}$ von X in $\sigma[{}_TT]$ gilt $\hat{X} \neq X$. Dann gibt es nach (ii) einen einfachen Untermodul $0 \neq E \subset \hat{X}/X$. Das heißt, es gibt einen Zwischenmodul $X \subset L \subset \hat{X}$ und eine exakte Folge

$$0 \to X \to L \to E \to 0.$$

Die Folge ist rein und zerfällt wegen (i). Nach Konstruktion ist aber X wesentlich in L. Somit muß $\hat{X} = X$, also X injektiv sein.

Ein Modul heißt *pseudo-kohärent*, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul davon endlich präsentiert ist. Folgende Zusammenhänge zwischen Endlichkeitsbedingungen von R und T werden von Bedeutung sein:

(1.8) (i) ${}_R R$ ist genau dann kohärent, wenn ${}_T T$ pseudo-kohärent ist;
(ii) Ist ${}_T T$ lokal noethersch, so ist ${}_R R$ noethersch;
(iii) Ist ${}_T T$ lokal noethersch und für jedes Idempotent $e \in T$ Te endlich koerzeugt, so ist ${}_R R$ artinsch.

Beweis. (i) Folgt aus Proposition (3.31) in Héaulme [7]. Man vergleiche dazu auch Theorem (2.1) in Fuller-Hullinger [5].
(ii) Für jedes Linksideal $L \subset R$ ist $\widehat{\mathrm{Hom}}(U, L) \subset \widehat{\mathrm{Hom}}(U, R)$, also endlich erzeugt. Dann ist aber auch L endlich erzeugt.
(iii) Nach (ii) ist jeder endlich erzeugte R-Modul endlich präsentiert und somit folgt die Behauptung aus Theorem (2.4) in Fuller-Hullinger [5].

2. Rein-halbeinfache Ringe. Nach Auslander [1] nennt man eine Familie von Homomorphismen aus R-MOD *noethersch*, wenn es zu jeder Folge $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von komponierbaren Nicht-Isomorphismen daraus ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_1 f_2 \dots f_k = 0$. Wird die dazu duale Bedingung erfüllt, so heißt die Familie *conoethersch.*

Ein Ring R ist links (rechts) *rein-halbeinfach*, wenn jede kurze reine exakte Folge in R-MOD (MOD-R) zerfällt. Für diese Ringe haben wir folgende Kennzeichnungen:

(2.1) Satz. *Für einen Ring R mit Funktorring T sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *${}_R R$ ist rein halbeinfach;*
(b) *jeder Modul in R-MOD ist rein-projektiv;*
(c) *jeder R-Modul ist direkte Summe von endlich erzeugten Moduln;*
(d) *${}_R R$ ist artinsch und die Familie der Homomorphismen zwischen unzerlegbaren Moduln ist noethersch;*
(e) *${}_T T$ ist perfekt (jeder Modul aus $\sigma[{}_T T]$ hat eine projektive Hülle);*
(f) *jeder flache Modul aus $\sigma[{}_T T]$ ist projektiv;*
(g) *$T/\mathrm{Jac}(T)$ ist halbeinfach und $\mathrm{Jac}(T)$ ist links T-nilpotent;*
(h) *T_T erfüllt die absteigende Kettenbedingung für zyklische (endlich erzeugte) Rechtsideale.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a), (b) und (c) wird z.B. in Zimmermann [13] gezeigt. Die Folgerungen (a) $\Leftrightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) ergeben sich aus dem THEOREM in Fuller [4]. Die Äquivalenz von (e), (f), (g) und (h) sind die von Ringen mit Eins bekannten Charakterisierungen von perfekten Ringen, die sich auch auf Ringe mit genügend vielen Idempotenten übertragen lassen (vgl. (3.20), (3.28) in Héaulme [7]; Wisbauer [12]). Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (f) ergibt sich übrigens auch leicht aus (1.3).

(e) $\Rightarrow$ (b) Sei ${}_T T$ perfekt und $N \in R$-MOD. Da für $I = \widehat{\mathrm{Hom}}(U, N)$ der kanonische Homomorphismus $U^{(I)} \to N$ epimorph und rein ist, erhalten wir mit $\widehat{\mathrm{Hom}}_R(U, -)$ die exakte Folge

$$\widehat{\mathrm{Hom}}(U, U^{(I)}) \to \widehat{\mathrm{Hom}}(U, N) \to 0.$$

Diese zerfällt, da $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, N)$ flach und damit projektiv ist. Durch Anwendung von $U \otimes_T -$ erhalten wir N als direkten Summanden von $U^{(I)}$ (vgl. (1.3)), das heißt N ist rein projektiv.

Man vergleiche dazu auch Théorème (4.2) in Héaulme [7].

Nunmehr können wir folgendes Lemma zeigen, das uns den Beweis der Brauer-Thrall-Vermutung wesentlich erleichtern wird:

(2.2) Lemma. *Für den Funktorring T von R-MOD gilt: Ist ${}_T T$ perfekt, dann ist jeder einfache Modul in $\sigma[{}_T T]$ endlich präsentiert.*

Beweis. Sei ${}_T T$ perfekt und $E \in \sigma[{}_T T]$ einfach. Nach (2.1) ist ${}_R R$ noethersch (sogar artinsch) und somit ist nach (1.8) ${}_T T$ pseudo-kohärent, d.h. jeder endlich präsentierte Modul in $\sigma[{}_T T]$ ist kohärent. Folglich genügt es zu zeigen, daß E Untermodul eines endlich präsentierten Moduls in $\sigma[{}_T T]$ ist. Da die globale Dimension von $\sigma[{}_T T] \leqq 2$ ist (siehe (1.5)), erhalten wir durch Bildung der projektiven Hüllen in $\sigma[{}_T T]$ eine exakte Folge

$$0 \to \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, C) \to \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, B) \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, A) \to E \to 0$$

mit $A, B, C \in R$-MOD und A endlich erzeugt (unzerlegbar), in der wir $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, C)$ als kleinen Untermodul von $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, B)$ auffassen können. Mit $U \otimes_T -$ ergibt sich daraus die exakte Folge

$$0 \to C \to B \xrightarrow{f} A \to U \otimes_T E \to 0.$$

Ist $U \otimes_T E \neq 0$, so erhalten wir mit $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, -)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, B) & \to & \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, A) & \to & E \to 0 \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \neq 0} \\
\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, B) & \to & \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, A) & \to & \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, U \otimes_T E)
\end{array}$$

Damit ist E (isomorph zu einem) Untermodul des endlich erzeugten und projektiven T-Moduls $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, U \otimes_T E)$.

Ist $U \otimes_T E = 0$, so spalten wir in C einen endlich präsentierten Summanden C_1 ab (möglich nach (2.1)) und erhalten durch Pushout-Bildung das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & C & \to & B & \xrightarrow{f} & A & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \to & C_1 & \to & B_1 & \xrightarrow{f_1} & A & \to 0,
\end{array}$$

in dem B_1 ebenfalls endlich präsentiert ist. Die untere Folge darf nicht zerfallen, denn sonst wäre C_1 direkter Summand in B und damit $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, C_1)$ direkter Summand in $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, B)$. Nach Konstruktion sind aber $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, C_1) \subset \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, C)$ kleine Untermoduln von $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, B)$.

Somit erhalten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, B) & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, A) & \to & E \to 0 \\
\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \neq 0} \\
\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, B_1) & \xrightarrow{\hat{f}_1} & \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}(U, A) & \to & \mathrm{Koker}\, \hat{f}_1 \to 0,
\end{array}$$

d.h. E ist Untermodul des endlich präsentierten Moduls $\mathrm{Koker}\, \hat{f}_1 \neq 0$.

Eine kategorielle Darstellung des folgenden Sachverhalts findet man z. B. in Simson [10], Theorem (5.4):

(2.3) Proposition. *Für einen linksartinschen Ring R mit Funktorring T sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

(a) T_T *ist perfekt;*
(b) ${}_T T$ *erfüllt die absteigende Kettenbedingung für zyklische (endlich erzeugte) Linksideale;*
(c) Jac (T) *ist rechts T-nilpotent;*
(d) *die Familie der Homomorphismen zwischen unzerlegbaren Moduln ist conoethersch.*

Beweis. Da ${}_R R$ artinsch ist, ist T semiperfekt und (b) und (c) sind bekannte Kennzeichnungen von rechts-perfekten Ringen mit genügend vielen Idempotenten (vgl. (2.1)). Ein einfacher Nachweis von (c) $\Leftrightarrow$ (d) ergibt sich analog zum Beweisschritt (c) $\Leftrightarrow$ (d) des Theorem in Fuller [4].

Ein Teil des nächsten Satzes ist die ringtheoretische Variante der in Baer [2] gemachten Ausführungen für *Ringoide.* Eine kategorielle Darstellung findet man auch in Gruson-Jensen [6], Proposition (10.7):

(2.4) Satz. *Für einen Ring R mit (Links-) Funktorring T sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) R_R *ist rein-halbeinfach;*
(b) *jeder Modul in* MOD-R *ist rein-injektiv;*
(c) T_T *ist lokal noethersch;*
(d) *jeder absolut reine Modul in $\sigma[T_T]$ ist injektiv;*
(e) U_T *ist noethersch.*

Beweis. (a) $\Leftrightarrow$ (b) ist trivial.
(c) $\Leftrightarrow$ (d) gilt nach (1.6).
(d) $\Leftrightarrow$ (e) ergibt sich aus $\sigma[U_T] = \sigma[T_T]$ (siehe (1.2)).
(b) $\Rightarrow$ (d) Nach (1.4.2) ist jeder absolut reine Modul in $\sigma[T_T]$ von der Form $M \otimes_R U_T$, $M \in$ MOD-R. Da M rein-injektiv ist, wird $M \otimes U_T$ nach (1.4.3) injektiv in $\sigma[T_T]$.
(d) $\Rightarrow$ (b) Für jedes $N \in$ MOD-R ist $N \otimes_R U_T$ absolut rein und daher injektiv. Nach (1.4.3) ist dann N rein-injektiv.

3. Ringe von endlichem Darstellungstyp. Ein assoziativer Ring R heißt *links von endlichem Darstellungstyp,* wenn er links-artinsch ist und es nur endlich viele endlich erzeugte unzerlegbare Linksmoduln gibt. Man nennt R *links von beschränktem Darstellungstyp,* wenn es links-artinsch ist und die Längen der endlich erzeugten unzerlegbaren Linksmoduln nach oben beschränkt sind. Nach unseren Vorbereitungen fällt es nun nicht mehr schwer, als Hauptergebnis zu zeigen:

(3.1) Satz. *Für einen Ring R mit Funktorring T sind nachstehende Eigenschaften gleichbedeutend:*

(a) ${}_R R$ *ist von endlichem Darstellungstyp;*
(a′) R_R *ist von endlichem Darstellungstyp;*

(b) ${}_RR$ *ist von beschränktem Darstellungstyp;*
(c) ${}_RR$ *und* R_R *sind rein-halbeinfach;*
(d) ${}_TT$ *ist lokal artinsch und noethersch;*
(e) T_T *ist lokal artinsch und noethersch;*
(f) U_T *ist artinsch und noethersch;*
(g) ${}_TT$ *und* T_T *sind perfekt.*

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(a') ist eine bekannte Beobachtung von Eisenbud-Griffith [3], (a) $\Rightarrow$ (b) ist klar.

(b) $\Rightarrow$ (g) Ist ${}_RR$ von beschränktem Darstellungstyp, so folgt aus dem Lemma von Harada-Sai (siehe Ringel [9], (2.2), Simson [10], (6.7)), daß die Familie der Homomorphismen zwischen unzerlegbaren Moduln noethersch und conoethersch ist. Nach (2.1) und (2.3) ist daher ${}_TT$ und T_T perfekt.

(g) $\Rightarrow$ (d) Ist ${}_TT$ perfekt, so ist nach Lemma (2.2) jeder einfache Modul in $\sigma[{}_TT]$ endlich präsentiert. Wegen T_T perfekt gilt die absteigende Kettenbedingung für endlich erzeugte Linksideale von ${}_TT$. Nach (1.7) ist damit ${}_TT$ lokal noethersch und folglich auch lokal artinsch.

(d) $\Rightarrow$ (a) Überlegungen in Auslander [1] lassen sich hier in folgender Weise darstellen: Ist ${}_TT$ lokal artinsch und noethersch, so ist zunächst wegen (1.8) ${}_RR$ artinsch, ${}_TT$ semiperfekt und es gibt nur endlich viele nicht-isomorphe einfache Moduln $E_1, \ldots, E_k$ in R-MOD.

Der Funktor $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, -)$ bewirkt eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Zuordnung zwischen den endlich erzeugten unzerlegbaren Moduln $X \in R$-MOD und den projektiven Hüllen $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, X)$ von einfachen Moduln aus $\sigma[{}_TT]$. Für jedes dieser $X \in R$-MOD gibt es einen Epimorphismus $X \to E_i$ für geeignetes $i \leqq k$ und damit einen nicht-trivialen Homomorphismus $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, X) \to \hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, E_i)$. Das bedeutet, daß alle einfachen Moduln in $\sigma[{}_TT]$ als Kompositionsfaktoren der Moduln $\{\hat{\mathrm{H}}\mathrm{om}_R(U, E_i)\}_{i \leqq k}$ auftreten. Da letztere aber endliche Länge haben, existieren davon nur endlich viele. Somit gibt es auch nur endlich viele endlich erzeugte unzerlegbare Moduln in R-MOD.

(a) $\Rightarrow$ (c) Wegen (a)$\Leftrightarrow$(d) ist ${}_TT$ perfekt und daher ${}_RR$ rein halbeinfach (Satz (2.1)). Durch analoge Bildungen mit dem Funktorring der endlich präsentierten Rechtsmoduln erhält man aus (a'), daß auch R_R rein-halbeinfach ist.

Ein anderer modultheoretischer Beweis dieser Implikation findet sich z. B. in Ringel-Tachikawa [8], Corollary (4.4).

(c) $\Rightarrow$ (e) Nach (2.1) gilt die absteigende Kettenbedingung für endlich erzeugte Rechtsideale in T_T und wegen (2.4) ist T_T lokal noethersch. Damit ist T_T auch lokal artinsch.

(e) $\Leftrightarrow$ (f) ist klar, da U_T endlich erzeugt und nach (1.2) $\sigma[U_T] = \sigma[T_T]$.

(f) $\Rightarrow$ (a) Für jeden unzerlegbaren Modul $L \in$ MOD-R ist $L \otimes_R U_T$ unzerlegbar und injektiv (U_T noethersch) und somit injektive Hülle eines einfachen Moduls (U_T artinsch). Andererseits ist nach (1.4.2) jede injektive Hülle eines einfachen Moduls von dieser Gestalt. Der Funktor $-\otimes_R U$ gibt uns also – bis auf Isomorphie – eine Bijektion zwischen den (endlich erzeugten) unzerlegbaren Moduln in MOD-R und den (injektiven Hüllen der) einfachen Moduln in $\sigma[U_T]$. Da U_T endliche Länge hat, gibt es nur endlich viele einfache Moduln in $\sigma[U_T]$ (einfache Faktoren von Untermoduln von U_T).

Literaturverzeichnis

[1] M. AUSLANDER, Representation Theory of Artin Algebras II. Comm. Algebra **1,** 269–310 (1974).
[2] D. BAER, Zerlegungen von Moduln und Injektive über Ringoiden. Arch. Math. **36,** 495–501 (1981).
[3] D. EISENBUD and P. GRIFFITH, The structure of serial rings. Pacific J. Math. **36,** 109–121 (1971).
[4] K. R. FULLER, On rings whose left modules are direct sums of finitely generated modules. Proc. Amer. Math. Soc. **54,** 39–44 (1976).
[5] K. R. FULLER and H. HULLINGER, Rings with finiteness conditions and their categories of functors. J. Algebra **55,** 94–105 (1978).
[6] L. GRUSON et C. U. JENSEN, Dimensions cohomologiques reliées aux foncteurs $\varprojlim^{(i)}$. In: Sém. d'Algèbre, Proc. Paris 1980; LNM **867,** 234–294, Berlin 1981.
[7] F. HÉAULME, Modules purs-semi-simples. Thèse, Nantes 1983.
[8] C. M. RINGEL and H. TACHIKAWA, QF-3 rings. J. Reine Angew. Math. **272,** 49–72 (1975).
[9] C. M. RINGEL, Report on the Brauer-Thrall Conjectures. In: Repr. Theory I, Proc. Ottawa 1979; LNM **831,** 104–136, Berlin 1980.
[10] D. SIMSON, On pure global dimension of locally finitely presented Grothendieck categories. Fund. Math. **96,** 91–116 (1977).
[11] R. WISBAUER, Erbliche Moduln und nichtassoziative Ringe. Comm. Algebra **7,** 47–77 (1979).
[12] R. WISBAUER, σ-semiperfekte und σ-perfekte Moduln. Math. Z. **162,** 131–138 (1978).
[13] W. ZIMMERMANN, Einige Charakterisierungen der Ringe, über denen reine Untermoduln direkte Summanden sind. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., 77–79 (1972).

Eingegangen am 3. 4. 1984

Anschrift des Autors:

Robert Wisbauer
Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Universitätsstr. 1
D-4000 Düsseldorf