# Lineare Algebra 1: Klausur

Priv.-Doz. Dr. Irene Bouw

**Aufgabe 1.** Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wir definieren

$$W_+ = \{A \in V \mid A^t = A\}, \qquad W_- = \{A \in V \mid A^t = -A\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $W_+$ und $W_-$ Untervektorräume von $V$ sind.

(b) Brechnen Sie die Dimension von $W_+ + W_-$ und von $W_+ \cap W_-$.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i & 2 \\ -1 & -i & -1 \\ i+2 & 1+2i & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.** Sei

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(a) Finden Sie eine Orthonormalbasis $\mathbb{B} = \{v_1, v_2\}$ von $W$ (bezüglich des Standard Skalarprodukt).

(b) Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf $W$. Berechnen Sie $p(e_1)$.

**Aufgabe 4.** Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. $\mathbb{B}$ ist eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$; dies brauchen Sie nicht zu zeigen. $\mathbb{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis.

(a) Berechnen Sie $M_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}(\mathrm{Id})$ und $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}}(\mathrm{Id})$.

(b) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis $\mathbb{A}$ gegeben durch

$$M_{\mathbb{A}}^{\mathbb{A}}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(T)$.

**Aufgabe 5.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 16 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$ und bestimmen Sie die Dimension der Eigenräume.

(b) Ist $A$ reell diagonalisierbar? Ist $A$ reell trigonalisierbar?

**Aufgabe 6.** Finden Sie alle Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

so daß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & c \end{pmatrix}$$

die Matrix einer Drehung ist.