Lineare Algebra 1: Probeklausur

Priv.-Doz. Dr. Irene Bouw

Abgabe: **Donnerstag 13.06.06, 11:00 Uhr in den Briefkasten.** Achtung: bitte geben Sie die Probeklausur nur ab, wenn Sie die Zulassung noch nicht geschafft haben. Die Lösungen werden am 13.6. im Internet veröffentlicht.

Aufgabe 1. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomen von Grad $\leq n$. Sei

$$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \qquad T(f) = xf(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, daß T eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Dimension von $\ker(T)$ und von $\mathrm{Im}(T)$.

Aufgabe 2. Sei $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 & -7 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 8 & -2 & -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$. Ist T surjektiv? Ist T injektiv?

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das System $Ax = b$ mindestens eine Lösung?

Aufgabe 4. Sei

$$\mathbb{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $T(v_1) = v_1 + v_2$ und $T(v_2) = v_1 - 2v_2$.

(a) Berechnen Sie die Matrix von T bezüglich der Basis $\mathbb{B}$. (Sie brauchen nicht zu zeigen, daß $\mathbb{B}$ eine Basis ist.)

(b) Berechnen Sie die Matrix von T bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 5. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Charakteristisches Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Finden Sie eine unitäre Matrix $S \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, so daß $\bar{S}^t AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 6. Sei
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$ ist.

(b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\mathbb{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ an, um eine Orthonormalbasis zu finden.