Lineare Algebra 1: Lösungen der Probeklausur

Priv.-Doz. Dr. Irene Bouw

Aufgabe 1. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomen von Grad $\leq n$. Sei

$$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \qquad T(f) = xf(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, daß T eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Dimension von $\ker(T)$ und von $\mathrm{Im}(T)$.

Lösung: (a) Für alle $f, g \in P_2(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} T(f+g) = x(f+g) - \int_0^x (f+g)\,\mathrm{d}t &= xf + xg - \int_0^x f\,\mathrm{d}t - \int_0^x g\,\mathrm{d}t \\ &= T(f) + T(g), \end{aligned}$$

und

$$T(cf) = x(cf) - \int_0^x (cf)\,\mathrm{d}t = cxf - c\int_0^x f\,\mathrm{d}t = cT(f).$$

Also ist T eine lineare Abbildung.

(b) Sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ein allgemeines Element von $P_2(\mathbb{R})$. Also ist $T(f) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 - a_0x - a_1x^2/2 - a_2x^3/3 = a_1x^2/2 + 2a_2x^3/3$. Es gilt daher daß $T(f) = 0$ genau dann wenn $a_1 = a_2 = 0$. Wir schließen daß $f = 1$ eine Basis von $\ker(T)$ ist, also ist $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 1$. Aus die Dimensionsformel folgt nun daß $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim_{\mathbb{R}} P_2(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}} \ker(T) = 3 - 1 = 2$.

Aufgabe 2. Sei $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 & -7 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 8 & -2 & -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$. Ist T injektiv? Surjektiv?

Lösung: Wir bringen die Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Rang der Matrix 2. Eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$ formen die erste zwei Spalten der Matrix:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Da $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 < 3$ ist T nicht surjektive. Aus die Dimensionsformel folgt daß $\dim \ker(T) = 5 - 2 = 3 > 0$. Also ist T auch nicht injektiv.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Für welches $t \in \mathbb{R}$ hat das System $Ax = b$ mindestens eine Lösung?

Lösung: Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Bitte geben Sie die Zeilenoperationen an.

Dieses System von Gleichungen hat eine Lösung genau dann wenn $t = -2$.

Aufgabe 4. Sei

$$\mathbb{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $T(v_1) = v_1 + v_2$ und $T(v_2) = v_1 - 2v_2$.

(a) Berechnen Sie die Matrix von T bezüglich die Basis $\mathbb{B}$. (Sie brauchen nicht zeigen daß $\mathbb{B}$ eine Basis ist.)

(b) Berechnen Sie die Matrix von T bezüglich die Standardbasis.

Lösung: (a)

$$M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\mathbb{A}$ die Standardbasis.

$$M^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{\mathbb{A}}_{\mathbb{B}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}(\mathrm{Id})^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} M^{\mathbb{A}}_{\mathbb{A}}(T) &= M^{\mathbb{B}}_{\mathbb{A}}(\mathrm{Id}) M^{\mathbb{B}}_{\mathbb{B}}(T) M^{\mathbb{A}}_{\mathbb{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Dimension der Eigenräume von A.

(b) Finden Sie eine unitaire Matrix $S \in M_{3,3}(\mathbb{C})$ so daß $\bar{S}^t AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung: (a) Es gilt:

$$P_A(t) = (4-t)\left|\begin{pmatrix} 2-t & 1+i \\ 1-i & 3-t \end{pmatrix}\right| = (4-t)(t^2-5t+4) = -(t-4)^2(t-1).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 1$.

Da $A = \bar{A}^t$ eine selbstadjungierte Matrix ist, wissen wir aus der Vorlesung daß A diagonalisierbar ist, also ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Eig}(A,4) = \mu(A,4) = 2$ und $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Eig}(A,1) = \mu(A,1) = 1$.

(b) Wir berechnen der Eigenraum zu $\lambda_1 = 4$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & 1+i & 0 \\ 1-i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: da A eine unitäre Matrix ist, wissen wir aus der Vorlesung daß A diagonalisierbar ist, und daher daß $\dim \mathrm{Eig}(A,4) = 2$. Daher braucht man nicht zu rechnen um die Matrix $A - 4E$ in Zeilenstufenform zu bringen!

Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,4)$ ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen der Eigenraum zu $\lambda_1 = 4$.

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, 3)$ ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnen wir eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren. Da v_1 und v_2 schon senkrecht zu einander stehen, müssen wir nur noch normieren. Es gilt: $\|v_1\| = \sqrt{6}$, $\|v_2\| = 1$, $\|v_3\| = \sqrt{3}$. Daher ist

$$S = \begin{pmatrix} (1+i)/\sqrt{3} & (1+i)/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie daß $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$ ist.

(b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\mathbb{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ an um eine Orthonormalbasis zu finden.

Lösung: (a) Er reicht zu zeigen daß die drei Vektoren linear unabhängig sind. Wir berechnen

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0.$$

Daher ist $\mathbb{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Zuerst berechnen wir eine Orthogonalbasis.

$$w_1 := v_1, \qquad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Orthonormalbasis ist daher:

$$\tilde{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$