Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 9.04. bis 10:20 Uhr
Besprechung:

*Die Anfänger in der Gruppentheorie können sich mit Herrn Dr. Vannacci in Verbindung setzen, um sich mit den Grundbegriffen vertraut zu machen. Als zusätzliche Hilfe kann mein Skript vom WS 2016/17 benutzt werden.*

# Kombinatorische Gruppentheorie

Übungsblatt 1

*Definition.* Sei $H$ eine Untergruppe einer Gruppe $G$. Es ist leicht zu zeigen, dass für jedes $g \in G$ die Teilmenge $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ auch eine Untergruppe von $G$ ist. Diese Untergruppe heißt *konjugierte* zu $H$ mit Hilfe von $g$.

Die Untergruppe $H$ heißt *normal* in $G$, falls $g^{-1}Hg = H$ für alle $g \in G$ ist.

**Aufgabe 1.** **3+3+4P.**

(a) Berechnen Sie die Menge aller linken Nebenklassen von $H = \{id, (123), (132)\}$ in $A_4$.
($A_n$ ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \ldots, n$.)

(b) Ist $H$ normal in $A_4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Listen Sie alle normalen Untergruppen von $A_4$ auf.

*Hinweis* zu (c):

- Benutzen Sie den Satz von Lagrange: *Ist $H$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe $G$, dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.*
- Sie dürfen auch den folgenden bekannten Fakt benutzen: $A_4$ hat keine Untergruppen der Ordnung 6.

**Aufgabe 2.** Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ ist die multiplikative Gruppe aller invertierbaren Elemente des Ringes $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Sei $G$ die Untergruppe von $\mathbb{Z}_{15}^*$, die von 2 erzeugt ist. **$4 \times 3$P.**

a) Schreiben Sie alle Elemente von $G$ auf.

b) Die Gruppe $G$ operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{15}^*$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

c) Die Gruppe $G$ operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{15}$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

d) Berechnen Sie die Anzahl von Orbits aus c) mit Hilfe der Burnside-Formel.

*Hinweis.* Siehe Beispiel 8.5 im Skript des WS 2016/17 auf der Webseite des Kurses.

**Fortsetzung Seite 2.**

**Aufgabe 3.** Es gibt unbeschränkte Mengen von roten und gelben Perlen. Wie viele Halsketten können aus 8 Perlen gemacht werden? **10P.**

*Hinweis.* Die Halsketten werden in $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Daher sind zwei Halsketten äquivalent, wenn sich die zweite Kette aus der ersten mit Hilfe von Spiegelungen und Rotationen transformieren läßt. Wenden Sie den Burnside-Satz an.

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie, dass die Rotationsgruppe des Würfels zu $S_4$ isomorph ist. **8P.**

*Hinweis.* Es gibt 4 lange Strecken in dem Würfel.