Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 9.07. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 12

Am 2.07.19 haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz. (Adian, Rabin) Sei $\mathcal{M}$ eine Markov-Eigenschaft. Dann gibt es keinen Algorithmus der entscheidet, ob eine Gruppe, gegeben durch eine endliche Präsentation, die Eigenschaft $\mathcal{M}$ besitzt.

(Siehe G. Baumslag "Topics in Combinatorial Group Theory", Birkhauser, Berlin, 1993; S. 112.)

Aufgabe 1. Sei $G = A * B$ mit $A \neq 1$ und $B \neq 1$. **8+12P.**

(a) Beweisen Sie, dass $G \ncong C \times D$ mit $C \neq 1$ und $D \neq 1$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ unendlich ist, falls A oder B unendlich ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden Eigenschaften einer endlich präsentierbaren Gruppe G: **8+12P.**

(1) G ist isomorph zu $A * B$ mit nichttrivialen A und B.
(2) $\mathrm{Aut}(G)$ ist unendlich.
(3) Das Zentrum von G ist gleich 1.
(4) G hat eine Untergruppe, die nicht endlich erzeugt ist.

(a) Beweisen Sie, dass diese Eigenschaften keine Markov-Eigenschaften sind.

(b) Beweisen Sie, dass diese Eigenschaften unentscheidbar sind für die Gruppen, die durch eine endliche Präsentation gegeben sind.

Beispiel. Wir betrachten die Eigenschaft $\mathcal{M}$: $G \cong G \times G$. Ich weiss nicht ob $\mathcal{M}$ eine Markov-Eigenschaft ist. Trotzdem kann man beweisen, dass $\mathcal{M}$ unentscheidbar in der Klasse endlich präsentierter Gruppen (EP-Gruppen) ist:

Sei U_0 eine EP-Gruppe mit unlösbarem Wortproblem. Wir haben gestartet von einer EP-Gruppe G_2, die eine spezifische Eigenschaft hatte. Jetzt ändern wir den Beweis minimal: Wir starten von der Gruppe $G_2 = \mathbb{Z}$. Im Beweis haben wir für jedes Wort $w \in U_0$ eine Gruppe W_w konstruiert, so dass folgendes gilt:

$$W_w = 1 \;\Leftrightarrow\; w =_{U_0} 1.$$

Jetzt setzen wir $G_w = W_w * W_w$. Nach Aufgabe 1 (a) ist

$$G_w = G_w \times G_w \;\Leftrightarrow\; W_w = 1.$$

Also ist

$$G_w = G_w \times G_w \;\Leftrightarrow\; w =_{U_0} 1.$$

Somit ist die Eigenschaft $\mathcal{M}$ unentscheidbar in der Klasse von EP-Gruppen.