Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi, 11.07, 10:15 Uhr

Aufgabe 5 wird nach der Vorlesung am Montag klar (s. auch Skript).

Lineare Algebra I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 [6P.]

Beweisen Sie, dass die Ungleichung $AB - BA \neq E_n$ für alle $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 2 [4+6P.]

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}?$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\ker(g) = \operatorname{Im}(f) \text{ und } \operatorname{Im}(g) = \ker(f).$$

Tipp: Benutzen Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 3

Für $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbb{R})$ berechnen Sie $\chi_A(\lambda)$. Prüfen Sie hiermit direkt, dass $\chi_A(A) = \mathbb{O}_2$ gilt. [5P.]

Aufgabe 4 [3+4+6P.]

Sei $A = \begin{pmatrix}2 & -8 & 2\\ 0 & 6 & -1\\ 0 & 20 & -3\end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Für jeden Eigenwert λ berechnen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \lambda x\right\}.$$

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 5 [2+4P.]

Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_k$ seien K-Untervektorräume von V. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) Falls die Summe $U_1 + \ldots + U_k$ direkt ist, so gilt $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant k$ mit $i \neq j$.

(b) Falls $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant k$ mit $i \neq j$, so ist die Summe $U_1 + \ldots + U_k$ direkt.