Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

SoSe 2018
09. August 2018

Erste Klausur zu Lineare Algebra I - Lösung

`Hinweise:`

- Die Antworten in Aufgabe 1 sollen OHNE Beweise gegeben werden.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Die Markierungen müssen deutlich sein.
- Beweise zu den Aufgaben 2–7 sind erforderlich. Es dürfen Sätze aus dem Skript benutzt werden. Die Voraussetzungen der Sätze müssen überprüft werden.

Aufgabe 1 (Multiple Choice) [4P.]

(a) Die Menge aller ungeraden Permutationen von S_5 zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung bildet eine Gruppe.

☐ Wahr ☒ Falsch

(b) Die folgenden Matrizen in $M(3,3,\mathbb{R})$ sind ähnlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

☐ Wahr ☒ Falsch

(c) Für alle $A \in M(3,3,K)$ gilt

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{EW}(A)} \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{EW}(A)} \mathrm{Eig}(A,\lambda).$$

☒ Wahr ☐ Falsch

(d) Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2.$$

☐ Wahr ☒ Falsch

Aufgabe 2. [2+4+3P.]

(a) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 132 und 55 zu bestimmen.

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $132x + 55y = \mathrm{ggT}(132, 55)$.

(c) Bestimmen Sie ein Element $z \in \mathbb{Z}_{132}$, für das $z \cdot_{132} 55 = 77$ erfüllt ist.

Lösung:

(a) Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 132 und 55 an:

$$\begin{aligned} 132 &= 2 \cdot 55 + 22 && (2.1)\\ 55 &= 2 \cdot 22 + 11 && (2.2)\\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathrm{ggT}(132, 55) = 11.$$

(b) Mit Hilfe von (a) erhalten wir

$$\mathrm{ggT}(132, 55) = 11 \overset{(2.2)}{=} 55 - 2 \cdot 22 \overset{(2.1)}{=} 55 - 2 \cdot (132 - 2 \cdot 55) = (-2) \cdot 132 + 5 \cdot 55.$$

Somit können wir $x = -2$ und $y = 5$ wählen.

Bemerkung: Die Koeffizienten sind nicht eindeutig.

(c) Mit Hilfe von (b) erhalten wir

$$77 = 7 \cdot 11 \overset{(b)}{=} 7 \cdot ((-2) \cdot 132 + 5 \cdot 55) = (-14) \cdot 132 + 35 \cdot 55.$$

Daraus folgt

$$35 \cdot_{132} 55 = 77.$$

Also ist $z = 35 \in \mathbb{Z}_{132}$ eine Lösung.

Bemerkung: Die Lösungsgesamtheit ist gegeben durch

$$\{z \in \mathbb{Z}_{132} \mid z \cdot_{132} 55 = 77\} = \{11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, 107, 119, 131\}.$$

Aufgabe 3. [5+5P.]

(a) Stellen Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
in der Form $A = X_1 \dots X_n D Y_1 \dots Y_m$ dar, wobei D eine Diagonalmatrix und $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_m$ Elementarmatrizen aus $M(3, 3, \mathbb{R})$ sind.

(b) Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie den Eintrag $(A^{-1})_{34}$.

Lösung:

(a) Es gilt

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{III+II}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A_1, \quad \text{d.h. } A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{32}(1)} \cdot A.$
- $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{II+I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A_2, \quad \text{d.h. } A_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{21}(1)} \cdot A_1.$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{II-III}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A_3, \quad \text{d.h. } A_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{23}(-1)} \cdot A_2.$
- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{I-II}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: D, \quad \text{d.h. } D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{12}(-1)} \cdot A_3.$

Somit gilt
$$D = E_{12}(-1) \cdot E_{23}(-1) \cdot E_{21}(1) \cdot E_{32}(1) \cdot A$$
Daraus folgt
$$\begin{aligned} A &= E_{32}(1)^{-1} \cdot E_{21}(1)^{-1} \cdot E_{23}(-1)^{-1} \cdot E_{12}(-1)^{-1} \cdot D \\ &= E_{32}(-1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_{23}(1) \cdot E_{12}(1) \cdot D. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Darstellung ist nicht eindeutig.

(b) Nach Satz 19.1.2 gilt

$$(A^{-1})_{34} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{3+4} \cdot \det(A'_{43}), \tag{3.1}$$

wobei A'_{43} die Matrix ist, die man aus A durch Streichen der 4-ten Zeile und der 3-ten Spalte erhält. Wir berechnen zunchst die Determinante von A. Mittels Laplace-Entwicklung nach der vierten Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (7-6) + (-14+12) = -3. \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir $\det(A'_{43})$. Es gilt

$$\det(A'_{43}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -10 - 1 + 18 = 7.$$

Zusammen mit (3.1) erhalten wir also

$$(A^{-1})_{34} = \frac{1}{-3} \cdot (-1)^7 \cdot 7 = \frac{7}{3}.$$

Alternative Lösung: Mit Satz 19.1.3 bestimmen wir die Inverse zu A. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 21 & -6 & -13 & -20 \\ -9 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$(A^{-1})_{34} = \frac{7}{3}.$$

Aufgabe 4. [10 P.]

Seien $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ und $U = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ zwei Untervektorräume in $\mathbb{R}^3$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist. Finden Sie eine Basis des Schnitts $V \cap U$.

Lösung: Sei $x \in V \cap U$. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $x = av_1 + bv_2$ und $x = cu_1 + du_2$. Daraus folgt

$$av_1 + bv_2 - cu_1 - du_2 = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{array}{rrrrl} -2a + & b - & c & & = 0 \\ 4a & - & c - & 3d & = 0 \\ 2a + & b - & c - & 4d & = 0 \end{array} \overset{\substack{\text{II+2·I} \\ \text{III+I}}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{rrrrl} -2a + & b - & c & & = 0 \\ & 2b - & 3c - & 3d & = 0 \\ & 2b - & 2c - & 4d & = 0 \end{array} \overset{\text{III-II}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{rrrrl} -2a + & b - & c & & = 0 \\ & 2b - & 3c - & 3d & = 0 \\ & & c - & d & = 0 \end{array}$$

Nun ist d die Parameter-Unbekannte. Dann ist

$$\begin{aligned} c &= d \\ b &= \frac{1}{2}(3c + 3d) = 3d \\ a &= -\frac{1}{2}(-b + c) = d \end{aligned}$$

Somit gilt

$$V \cap U = \{du_1 + du_2 \mid d \in \mathbb{R}\} = \{d(u_1 + u_2) \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $V \cap U$.

Bemerkung: Für jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$\mathcal{B} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

auch eine Basis von $V \cap U$.

Aufgabe 5. [3+6+2P.]

Sei
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ eine Basis des zugehörigen Eigenraums $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$.

(c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Wenn ja, bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in M(3,3,\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix D, so dass $T^{-1}AT = D$ ist.

Lösung:

(a) Nach Satz 23.1.5 sind die Eigenwerte genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)(-1-\lambda)+6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A.

Bemerkung: Es gilt
$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

(b) Nach (a) sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A.

- Bestimmung von $\mathrm{Eig}(A,1)$:
  Es ist $x \in \mathrm{Eig}(A,1)$ genau dann, wenn $(A - E_3)x = 0$. Somit ist

  $$(A - E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \text{ bel.} \end{aligned}$$

  Somit gilt
  $$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Also ist
  $$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
  eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,1)$.

  Bemerkung: Für jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist
  $$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\}$$
  auch eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,1)$.

- Bestimmung von $\mathrm{Eig}(A,2)$:
  Es ist $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Eig}(A,2)$ genau dann, wenn $(A - 2E_3)x = 0$. Somit ist

$$(A - 2E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 \phantom{{}- x_3} &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \phantom{{}- x_3} &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

  Nun ist x_3 die Parameter-Unbekannte. Dann ist

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{5}x_3 \\ x_1 &= -x_2 + x_3 = -\frac{2}{5}x_3 + x_3 = \frac{3}{5}x_3 \end{aligned}$$

  Somit gilt

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

  Also ist

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

  eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,2)$.
  Bemerkung: Für jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ c\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

  auch eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,2)$.

(c) Aus (b) folgt

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Eig}(A,1)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Eig}(A,2)) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

Nach Satz 24.1.8 ist A somit nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 6. [10P.]

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ y - z \\ x + z \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Lösung: Wir stellen $\varphi(b_1), \varphi(b_2)$ und $\varphi(b_3)$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar. Es gilt

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot b_1 + (-4) \cdot b_2 + (-7) \cdot b_3,$$

$$\varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 + 5 \cdot b_3,$$

$$\varphi(b_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + (-2) \cdot b_2 + (-2) \cdot b_3.$$

Laut Definition 25.1.3 gilt somit

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. [3+3P.]

(a) Finden Sie ein $\sigma \in S_5$ mit $\sigma^2 = (12345)$.

(b) Wie viele Lösungen der Gleichung aus (a) gibt es?

Lösung:

(a) Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\sigma_0 = (14253) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Lösung der Gleichung $\sigma^2 = (12345)$.

(b) Beh.: Die Gleichung $\sigma^2 = (12345)$ besitzt nur eine Lösung in S_5, nämlich $\sigma_0 = (14253)$.

Proof. Nach (a) ist σ_0 eine Lösung. Sei nun $\tau \in S_5$ ein beliebiges Element mit $\tau^2 = (12345)$. Wir müssen zeigen, dass $\tau = \sigma_0$ ist.

1.Weg: Da $\tau^2(i) \neq i$ für alle $1 \leq i \leq 5$ ist, folgt $\tau(i) \neq i$ für alle $1 \leq i \leq 5$. Somit gilt $\tau(1) \neq 1$. Angenommen, $\tau(1) = 2$. Dann gilt $\tau(1) = 2 = \tau^2(1) = \tau(2)$, Widerspruch. Angenommen, $\tau(1) = 3$. Dann ist $\tau(3) = \tau^2(1) = 2$. Somit ist $\tau(2) = \tau^2(3) = 4$, also $\tau(4) = \tau^2(2) = 3 = \tau(1)$, Widerspruch. Angenommen, $\tau(1) = 5$. Dann ist $\tau(5) = \tau^2(1) = 2$. Somit ist $\tau(2) = \tau^2(5) = 1$, also $\tau(1) = \tau^2(2) = 3$, Widerspruch. Also ist $\tau(1) = 4$. Daraus folgt $\tau(4) = \tau^2(1) = 2$. Somit $\tau(2) = \tau^2(4) = 5$. Also $\tau(5) = \tau^2(2) = 3$ und schließlich $\tau(3) = \tau^2(5) = 1$. Damit ist $\tau = \sigma_0$.

2. Weg: Da ($\tau \in S_5$) ist, gibt es nach Satz 8.1.3 gibt es paarweise unabhängige Zykel $\tau_1, \tau_2 \in S_5$ mit $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$. Daraus folgt

$$\tau^2 = \tau_1^2 \circ \tau_2^2. \tag{7.1}$$

Ist τ_i ein k-Zykel, so ist τ_i^2 ein k-Zykel oder trivial. Zusammen mit (7.1) folgt, dass τ_1 ein 5-Zykel und τ_2 die Identität oder umgekehrt. Sei o.B.d.A. τ_1 ein 5-Zykel und τ_2 die Identitt. Dann ist auch τ ein 5-Zykel. Schreibe $\tau = (1bcde)$. Dann ist

$$(12345) = \tau^2 = (1cebd).$$

Daraus folgt $\tau = (14253) = \sigma_0$. □