Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 14.07.2016
Präsenzübung 2

Präsenzübungen zur Analysis II

1. (a) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} ae^{b|x|}dx$?
   (b) Berechnen Sie
   $$\int_{-\infty}^{\infty} (|x|+1)e^{1-|x|}dx.$$
2. (a) Welche der folgenden Mengen sind abgeschlossen:
      i. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+x+1<0 \text{ oder } x+y=2\}$,
      ii. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$.
   (b) Geben Sie in den Fällen, in denen M nicht abgeschlossen ist, einen Berührpunkt von M an, der nicht in M liegt.
3. An welchen Stellen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist die Jacobi-Matrix von
   $$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x+y)e^z \\ \cos(x+y)e^z \\ x+y^2+z \end{pmatrix},$$
   invertierbar?
4. Gegeben sei die Funktion
   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.
5. Im $\mathbb{R}^3$ sei der folgende Weg gegeben
   $$\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -4e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ 8e^{-2t} \end{pmatrix}.$$
   (a) Warum ist γ rektifizierbar?
   (b) Bestimmen Sie die Weglänge von γ.

Die Präsenzaufgaben werden weder abgegeben noch bewertet.

Besprechung: 15. Juli