Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
http://blog.ruediger-braun.net

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

18. Dezember 2013

Klausurhilfsmittel

- Vier beidseitig beschriebene A4-Blätter
- Ein Taschenrechner. Der Taschenrechner darf nicht symbolisch differenzieren können

Übungsblätter

- Es gibt 12 Übungsblätter
- Alle Übungsblätter sind klausurrelevant
- Alle Übungsblätter mit Ausnahme von Blatt 12 gehen in die Klausurnote ein

Bedingte Wahrscheinlichkeit

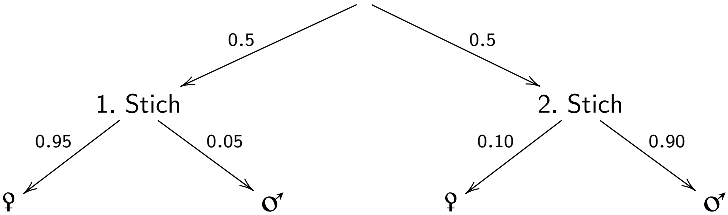
Juwelenwespen

Juwelenwespen legen Eier in Puppen anderer Insekten. Das Geschlechterverhältnis ist

- 95% weibliche und 5% männliche Eier, wenn die Puppe noch nicht von einer anderen Juwelenwespe infiziert wurde
- 10% weibliche und 90% männliche Eier andernfalls

Wahrscheinlichkeitsbaum Juwelenwespe

Der Wahrscheinlichkeitsbaum für eine zweimal gestochene Puppe.
Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt.



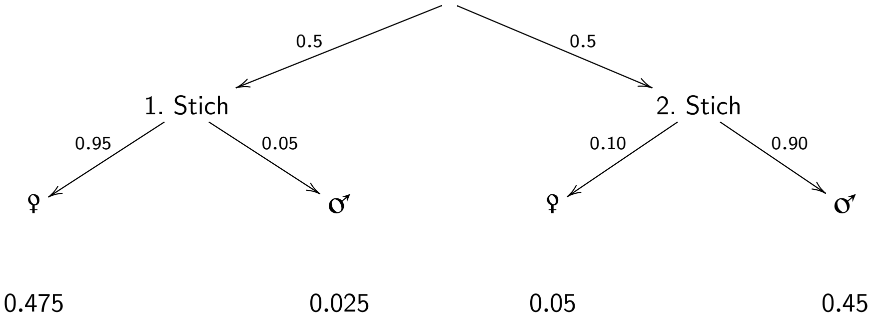
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

- Bekannt:
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und damit auch $P(B^c)$
  - bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|B^c)$
- Gesucht: totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot (1 - P(B)) \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit für die zweimal gestochene Puppe

Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte, soeben geschlüpfte Wespe ein Junge ist, beträgt 47.5%

Bayessche Formel

- Bekannt:
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(B)$
  - bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|B^c)$
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$ aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Gesucht: bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Juwelenwespen: Fortsetzung

Eine Puppe sei zweimal gestochen worden. Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine zufällig ausgewählte, soeben geschlüpfte männliche Wespe aus dem zweiten Stich?

$$A: \text{“Wespe ist männlich”}$$
$$B: \text{“Wespe stammt aus dem zweiten Stich”}$$

Bekannt:

$$P(A) = 0.475, \qquad P(B) = 0.5, \qquad P(A|B) = 0.90$$

Gesucht:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.90 \cdot 0.5}{0.475} = 0.947$$

Röntgenreihenuntersuchung auf TB

In den 1960-er Jahren wurden Röntgenreihenuntersuchungen durchgeführt. Beispielhafte Daten:

- bei 94% aller Erkrankten schlägt der Test an
- bei 1% der Gesunden schlägt der Test an
- 99.8% aller Probanden sind gesund
- Welches Ereignis nennen wir A und welches B?
- B ist das Ereignis, dessen totale Wahrscheinlichkeit bekannt ist

Zufällig herausgegriffener Proband

$$A : \text{“Verdacht auf TB”}$$
$$B : \text{“an TB erkrankt”}$$

Röntgenreihenuntersuchungen, Fortsetzung

- $P(B) = 0.002$ (totale Wahrscheinlichkeit)
- $P(A|B) = 0.94$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)
- $P(A|B^c) = 0.01$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \\ &= 0.94 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998 \\ &= 0.00188 + 0.00998 \\ &= 0.01186 \end{aligned}$$

- 1.186% aller Probanden verlassen die Untersuchung mit einem Verdacht

Röntgenreihenuntersuchung, Fortsetzung

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kranker nicht endeckt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Verdachtsdiagnose falsch?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine falsche Diagnose gestellt?

erste Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kranker nicht endeckt?
"Falsch negativer Befund": Krankheit übersehen

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0.94 = 0.06$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kranker für gesund gehalten wird, beträgt 6%

zweite Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Verdachtsdiagnose falsch?
"Falsch positiver Befund": Krankheit zu Unrecht diagnostiziert

$$\begin{aligned} P(B^c|A) &= 1 - P(B|A) \\ &= 1 - \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{0.94 \cdot 0.002}{0.01186} \\ &= 1 - 0.1585 \\ &= 0.8415 \end{aligned}$$

Wer mit Verdachtsdiagnose aus der Röntgenreihenuntersuchung kam, war mit nahezu 85% Wahrscheinlichkeit **gesund.**

dritte Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Fehldiagnose?

- Das ist eine totale Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) &= P(A|B^c) \cdot P(B^c) + P(A^c|B) \cdot P(B) \\ &= 0.06 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998 \\ &= 0.0101 \end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit einer Fehldiagnose beträgt 1.01%

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Zufallsvariable

- Zufallsexperiment wird durchgeführt, dessen Ergebnis ein Wert ist
- Das ist der Wert der Zufallsvariablen
- Zufallsvariablen heißen meist X, Y
- Mathematisch ausgedrückt: Eine Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis ω eine Zahl $X(\omega)$ zu
- Beispiel 10-facher Wurf eines fairen Würfels: Die Anzahl der Sechsen definiert eine Zufallsvariable X
- Zufallsvariable lenken den Blick auf die interessanten Daten, indem sie die Elementarereignisse ausblenden
- Eine Zufallsvariable heißt *diskret*, wenn alle ihre Werte ganze Zahlen sind

Interpretation

Wahrscheinlichkeitstheorie	Experiment
Zufallsvariable X	Messvorrichtung
Ereignisraum Ω	Menge aller möglichen Versuchsabläufe
Elementarereignis ω	beobachteter Versuchsablauf
Wert $X(\omega)$	beobachteter Messwert

Schreibweisen

X eine Zufallsvariable auf Ω. Wir schreiben zur Abkürzung (hierbei sind a und b irgendwelche Zahlen):

$$\begin{aligned}
\{X = a\} &= \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } X(\omega) = a\} \\
\{X \leq a\} &= \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } X(\omega) \leq a\} \\
\{a < X \leq b\} &= \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } a < X(\omega) \leq b\}
\end{aligned}$$

usw.

Beispiel zur Schreibweise

- Dreifacher Wurf einer fairen Münze, also $\Omega = \{A, Z\}^3$
- X bezeichne die Anzahl der Würfe mit "Adler". Dann kann X die Zahlen 0,1,2 und 3 annehmen
- $\{X = 2\} = \{(A, A, Z), (A, Z, A), (Z, A, A)\}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{8} = 0.375$
- Statt $P(X = 2)$ schreibt man auch $P_X(2)$
- Dann ist P_X eine Verteilung auf den ganzen Zahlen

Fakultät, Beispiel

- In der Lottotrommel sind 49 Kugeln. **Alle** Kugeln werden gezogen, die Reihenfolge wird notiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- Es gibt 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, 48 für die zweite, 47 für die dritte, . . . , 2 für die 48-te (also die vorletzte), und 1 für die letzte
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$
\begin{aligned}
&49 \cdot 48 \cdot 47 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000 \\
&= 6.083 \cdot 10^{62}
\end{aligned}
$$

- Diese Zahl schreibt man 49!

Fakultät

- Die Zahl

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

  bezeichnet man als *Fakultät* von n
- Sie gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n verschiedene Objekte anzuordnen
- Jede solche Anordnung bezeichnet man als *Permutation*
- Beispiele

$$1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120$$

- Außerdem definiert man $0! = 1$

Zahlenbeispiele

- $6! = 720$
- $12! = 479\,001\,600$
- $22! = 1.124 \cdot 10^{21}$
- $69! = 1.711 \cdot 10^{98}$
- $70! = 1.198 \cdot 10^{100}$

Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

- Aus der Lottotrommel werden 6 Kugeln gezogen
- Anzahl der Möglichkeiten **unter** Beachtung der Reihenfolge

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

- Taschenrechner Taste $\boxed{\text{nPr}}$

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

- Aus der Lottotrommel werden 6 Kugeln gezogen
- Anzahl der Möglichkeiten **ohne** Beachtung der Reihenfolge

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

- Diese Zahl ist gleich

$$\frac{49!}{6! \cdot 43!}$$

- Sie heißt "49 über 6" und man schreibt sie $\binom{49}{6}$
- Taschenrechner: Taste $\boxed{\text{nCr}}$