Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
http://blog.ruediger-braun.net

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

15. Januar 2014

Testverfahren: Fehler erster und zweiter Art

- Ein *Test* besteht aus einer Vorschrift, die zu jedem möglichen Versuchsausgang festlegt, ob die Nullhypothese H_0 angenommen oder abgelehnt wird.
- Dabei kann es zu zwei verschiedenen Fehlentscheidungen kommen:

	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 trifft zu	richtige Entscheidung	Fehler 1. Art
H_1 trifft zu	Fehler 2. Art	richtige Entscheidung

Signifikanztests

- Für den Fall, dass H_0 zutrifft, bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 trotzdem abgelehnt wird, als *Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art*
- Ein Test heißt *Signifikanztest* zum Niveau α, wenn alle Fehlerwahrscheinlichkeiten erster Art $\leq \alpha$ sind
- Das übliche Niveau ist 0.05
- Für den Fall, dass H_0 nicht zutrifft, bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 trotzdem nicht abgelehnt wird, als *Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art*

Ein- und zweiseitige Tests für Erfolgswahrscheinlichkeiten

- Ein ja/nein-Experiment mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-mal wiederholt
- Ziel: Aussage über p relativ zu einem Referenzwert p_0
- verschiedene Nullhypothesen sind denkbar

$$\begin{array}{c|r} H_0: p \geq p_0 & \text{einseitiger unterer Test} \\ H_0: p \leq p_0 & \text{einseitiger oberer Test} \\ H_0: p = p_0 & \text{zweiseitiger Test} \end{array}$$

Einseitiger unterer Binomialtest zum Niveau α

- Gegeben sind unabhängige $B(1,p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1,\ldots,X_n$ mit unbekanntem p sowie ein Signifikanzniveau α
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert p_0
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p \geq p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p < p_0\}$
- Der Wert c ist so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} \leq \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} > \alpha$$

- c heißt *kritischer Wert*

Einseitiger unterer Binomialtest zum Niveau α

- Entscheidungsregel:
  - Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Anzahl der Erfolge echt kleiner als c ist
  - Die Nullhypothese wird beibehalten, falls die Anzahl der Erfolge mindestens c ist

Beispiel L-Bakterien

- Letztes Mal war die Frage

  Schädigt das Pestizid L-Bakterien mehr als R-Bakterien?

  zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ zu beantworten
- In unbelastetem Boden waren 75% aller Bakterien L-Bakterien
- Die Nullhypothese ist, dass der Anteil in belastetem Boden mindestens genauso groß ist
- Also $H_0 : p \geq p_0$ für $p_0 = 0.75$
- Tabelle: kritischer Wert $c = 16$
- Bei 15 oder weniger Erfolgen wird die Nullhypothese abgelehnt

Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^{r} B_{n,p}(k)$ für $n = 27$

r	p	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79
9	0.	00001				
10		00003	00002	00001	00001	
11		00016	00010	00006	00003	00002
12		00067	00042	00026	00015	00009
13		00245	00161	00103	00065	00039
14		00778	00538	00364	00240	00153
15		02162	01573	01119	00777	00526
16		05278	04031	03016	02208	01577
17		11325	09067	07126	05488	04136
18		21405	17927	14769	11951	09483
19		35729	31217	26889	22804	19012
20		52917	48050	43120	38195	33350
21		70105	65819	61232	56385	51330
22		84168	81165	77770	73973	69777
23		93340	91729	89806	87530	84864
24		97926	97305	96521	95540	94322
25		99577	99423	99219	98948	98592
26		99958	99939	99914	99878	99828

Einseitiger oberer Binomialtest zum Niveau α

- Gegeben sind unabhängige $B(1, p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem p sowie ein Signifikanzniveau α
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert p_0
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p \leq p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p > p_0\}$
- Der kritische Wert c ist so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} \geq 1 - \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} < 1 - \alpha$$

- Entscheidungsregel:
  - Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Anzahl der Erfolge echt größer als c ist
  - Die Nullhypothese wird beibehalten, falls die Anzahl der Erfolge höchstens c ist

Beispiel zum oberen Binomialtest

- Zuchtlachsen wird Fischabfall und vegetarisches Futter zur Auswahl angboten
- 11% aller Lachse bevorzugen das Gemüse
- Die Lachse werden stufenweise an vegetarische Kost gewöhnt
- Die Frage

  Bevorzugen sie das Gemüse nach der Umgewöhnung mit höherer Wahrscheinlichkeit als vorher?

  soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ beantwortet werden
- Einseitiger, oberer Binomialtest mit Nullhypothese $H_0 = \{p \leq 0.11\}$
- Stichprobenumfang $n = 38$

Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^{r} B_{n,p}(k)$ für $n = 38$

r	p	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
0	0.	01825	01193	00777	00503	00324	00208
1		09530	06799	04802	03360	02330	01602
2		25367	19616	14958	11259	08372	06154
3		46484	38625	31576	25421	20174	15794
4		67014	59183	51404	43938	36986	30680
5		82525	76460	69790	62753	55596	48542
6		92005	88205	83579	78216	72258	65879
7		96819	94841	92175	88779	84658	79865
8		98893	98020	96717	94895	92480	89428
9		99660	99329	98782	97941	96724	95054
10		99908	99798	99599	99261	98728	97933
11		99978	99946	99882	99763	99558	99227
12		99995	99987	99969	99932	99862	99740
13		99999	99997	99993	99982	99962	99922
14			99999	99998	99996	99990	99979
15					99999	99998	99995
16							99999

Beispiel Lachse, Fortsetzung

- die Tabelle zeigt $c = 8$
- die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Zahl der Erfolge mindestens 9 beträgt
- bei 8 oder weniger Erfolgen wird sie beibehalten

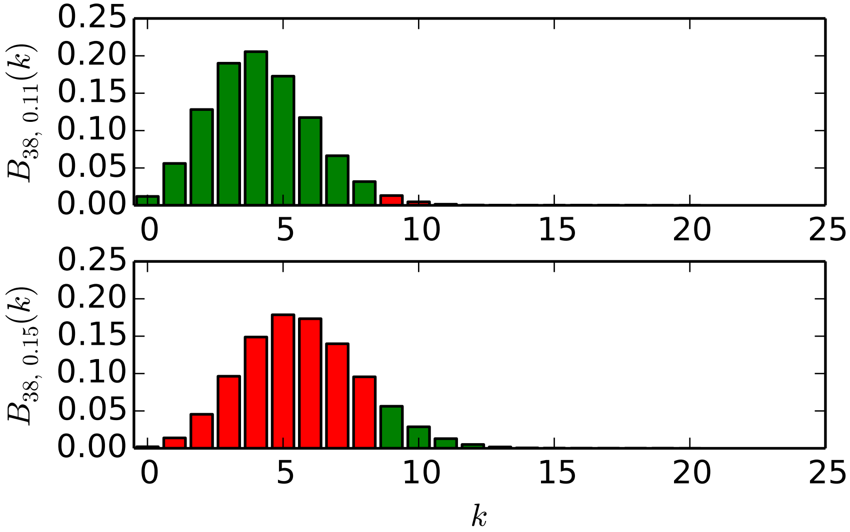
Beispiel Lachs: Power des Tests

- Was ist die Power des Tests, wenn tatsächlich nach der Umgewöhnungsphase 15% der Lachse vegetarische Kost bevorzugen?
- Die Power ist die Wahrscheinlichkeit, unter dem angegebenen p-Wert, der nicht zur Nullhypothese gehört, die Nullhypothese auch tatsächlich abzulehnen
- H_0 wird abgelehnt bei mindestens 9 Erfolgen
- Also ist die Power gleich

$$\sum_{k=9}^{38} B_{38,0.15}(k) = 1 - \sum_{k=0}^{8} B_{38,0.15}(k) = 1 - 0.89428 = 0.10572$$

- Die Power beträgt nur ungefähr 10%

Power, Fortsetzung



Zweiseitiger Binomialtest zum Niveau α

- Gegeben sind unabhängige $B(1, p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem p sowie ein Signifikanzniveau α
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert p_0
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p = p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p \neq p_0\}$
- Idee: Man testet $\{p \leq p_0\}$ zum Signifikanzniveau $\frac{\alpha}{2}$ und dann $\{p \geq p_0\}$ zum Signifikanzniveau $\frac{\alpha}{2}$
- H_0 wird abgelehnt, wenn einer der beiden Tests zur Ablehnung führt

Zweiseitiger Binomialtest zum Niveau α

Die kritischen Werte c_1 und c_2 sind so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c_1-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} > \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_2} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} \geq 1-\frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_2-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} < 1-\frac{\alpha}{2}$$

Entscheidungsregel:

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Anzahl der Erfolge echt kleiner als c_1 oder echt größer als c_2 ist
- Die Nullhypothese wird beibehalten, wenn die Anzahl der Erfolge c_1 nicht unter- und c_2 nicht überschreitet

Zweiseitiger Binomialtest, Beispiel

- Bei 250 Würfen eines Würfels fiel 55 mal eine Sechs. Kann man zu 95% sicher sein, dass der Würfel gezinkt ist?
- Sei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit des Würfels für eine Sechs
- Zweiseitiger Binomialtest mit

$$\textit{Nullhypothese: } H_0 = \left\{p = \tfrac{1}{6}\right\}$$
$$\textit{Alternative: } H_1 = \left\{p \neq \tfrac{1}{6}\right\}$$

- Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$

Tabelle von $\sum_{k=0}^{n} B_{250,\,1/6}(k)$

r	p	$\frac{1}{6}$
20	0.	00005
21		00011
22		00024
23		00050
24		00100
25		00189
26		00343
27		00598
28		01005
29		01628
30		02546
31		03849
32		05632
33		07989
34		10997
35		14709
36		19143
37		24273
38		30023
39		36275

r	p	$\frac{1}{6}$
40	0.	42870
41		49627
42		56351
43		62856
44		68977
45		74581
46		79576
47		83912
48		87579
49		90603
50		93034
51		94941
52		96400
53		97491
54		98286
55		98853
56		99248
57		99517
58		99696
59		99812

Beispiel, Fortsetzung

- $c_1 = 30$ und $c_2 = 54$
- Die Nullhypothese kann zum Niveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden, wenn höchstens 29 oder mindestens 55 Sechsen fallen
- Bei 55 Sechsen kann die Nullhypothese also abgelehnt werden
- Wir können mit 95% Sicherheit sagen, dass der Würfel gezinkt ist

Beispiel, Fortsetzung