Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
http://blog.ruediger-braun.net

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

17. Dezember 2014

Klausurhilfsmittel

- Vier beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter
- Ein Taschenrechner. Der Taschenrechner darf nicht symbolisch differenzieren können

Übungsblätter

- Es gibt 12 Übungsblätter
- Alle Übungsblätter sind klausurrelevant
- Alle Übungsblätter mit Ausnahme von Blatt 12 gehen in die Klausurnote ein

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bezeichnet man als *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der *Hypothese* B

- Die Hypothese B ist also vorausgesetzt (beispielsweise ist jemand 50 Jahre alt geworden)
- Das Ereignis A ist das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit interessiert (beispielsweise das Ereignis, mindestens 80 Jahre alt zu werden)
- Man bezeichnet $P(A)$ auch als *totale* Wahrscheinlichkeit, wenn man den Unterschied zu einer bedingten Wahrscheinlichkeit verdeutlichen will

Beispiel zur bedingten Wahrscheinlichkeit

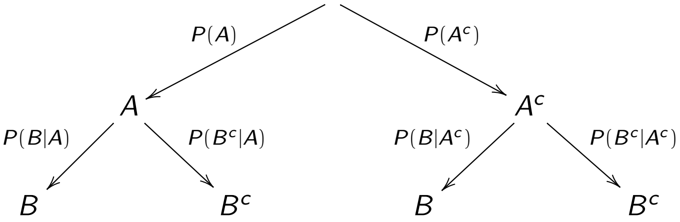
- Sei E_{m50} das Ereignis, dass ein männliches Neugeborenes ein Alter von mindestens 50 Jahren erreichen wird; laut (österreichischer) Sterbetafel ist $P(E_{m50}) = 0.919$
- für 80 Jahre $P(E_{m80}) = 0.365$
- für weibliche Neugeborene $P(E_{w50}) = 0.958$ und $P(E_{w80}) = 0.566$
- dann wegen $E_{m50} \cap E_{m80} = E_{m80}$

$$P(E_{m80}|E_{m50}) = \frac{P(E_{m80} \cap E_{m50})}{P(E_{m50})} = \frac{0.365}{0.919} = 0.397$$

- und

$$P(E_{w80}|E_{w50}) = \frac{P(E_{w80} \cap E_{w50})}{P(E_{w50})} = \frac{0.566}{0.958} = 0.591$$

Wahrscheinlichkeitsbäume



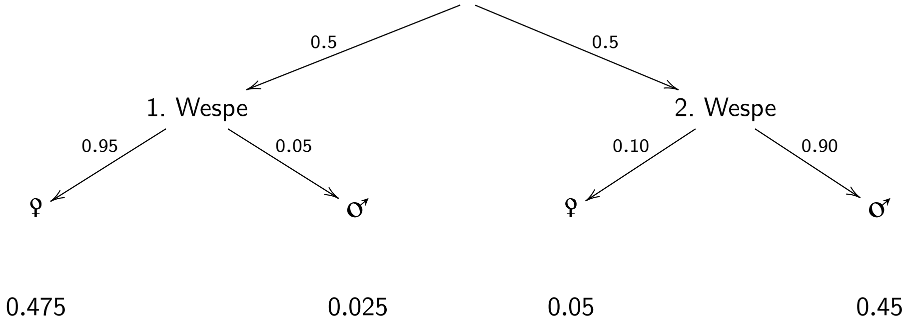
Juwelenwespen

Juwelenwespen legen Eier in Puppen anderer Insekten. Das Geschlechterverhältnis ist

- 95% weibliche und 5% männliche Eier, wenn die Puppe noch nicht von einer anderen Juwelenwespe infiziert wurde
- 10% weibliche und 90% männliche Eier andernfalls

Wahrscheinlichkeitsbaum Juwelenwespe

Der Wahrscheinlichkeitsbaum für eine zweimal gestochene Puppe. Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei ein weibliches Ei der ersten Wespe ist, beträgt 0.475

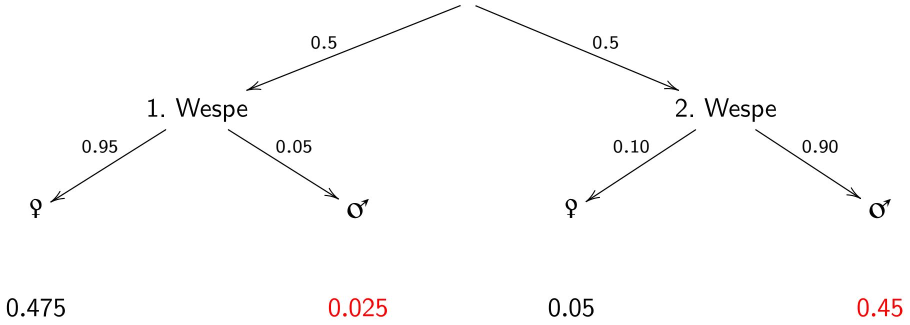
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

- Bekannt:
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und damit auch $P(B^c)$
  - bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|B^c)$
- Gesucht: totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot (1 - P(B)) \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit für die zweimal gestochene Puppe

Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Ei männlich ist, beträgt 47.5%

Bayessche Formel

- Bekannt:
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(B)$
  - bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|B^c)$
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$ aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Gesucht: bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Juwelenwespen: Fortsetzung

Eine Puppe sei zweimal gestochen worden. Beide Wespen haben dieselbe Anzahl Eier gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein zufällig ausgewähltes, männliches Ei von der zweiten Wespe

$$A : \text{“Ei ist männlich”}$$
$$B : \text{“Ei stammt von der zweiten Wespe”}$$

Bekannt:

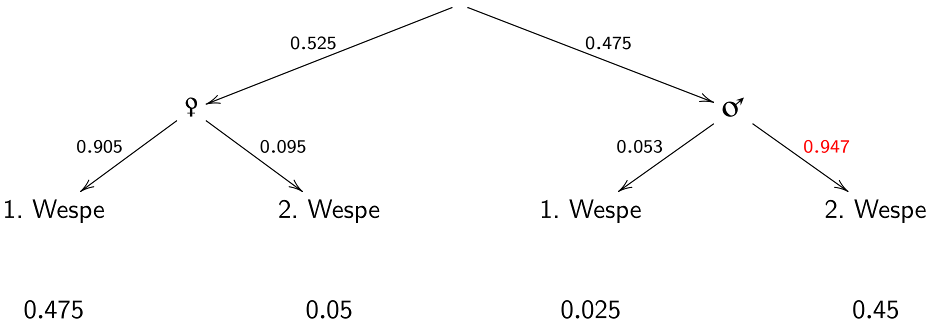
$$P(A) = 0.475, \qquad P(B) = 0.5, \qquad P(A|B) = 0.90$$

Gesucht:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.90 \cdot 0.5}{0.475} = 0.947$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes männliches Ei von der zweiten Wespe stammt, beträgt 94.7%

Juwelenwespe: Alternativer Wahrscheinlichkeitsbaum



Juwelenwespe: Genetische Vielfalt

- Ein männliches Ei stammt mit Wahrscheinlichkeit 0.053 von der ersten und mit Wahrscheinlichkeit 0.947 von der zweiten Wespe
- Ein weibliches Ei stammt mit Wahrscheinlichkeit 0.905 von der ersten und mit Wahrscheinlichkeit 0.095 von der zweiten Wespe
- Treffen ein männliches und ein weibliches Ei aufeinander, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie von derselben Wespe abstammen

$$0.053 \cdot 0.905 + 0.947 \cdot 0.095 = 0.138$$

Röntgenreihenuntersuchung auf TB

In den 1960-er Jahren wurden Röntgenreihenuntersuchungen durchgeführt.
Beispielhafte Daten:

- bei 94% aller Erkrankten schlägt der Test an
- bei 1% der Gesunden schlägt der Test an
- 99.8% aller Probanden sind gesund
- Welches Ereignis nennen wir A und welches B?
- B ist das Ereignis, dessen totale Wahrscheinlichkeit bekannt ist

Zufällig herausgegriffener Proband

$$\begin{aligned} A &: \text{“Verdacht auf TB”} \\ B &: \text{“an TB erkrankt”} \end{aligned}$$

Röntgenreihenuntersuchungen, Fortsetzung

- $P(B) = 0.002$ (totale Wahrscheinlichkeit)
- $P(A|B) = 0.94$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)
- $P(A|B^c) = 0.01$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \\ &= 0.94 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998 \\ &= 0.00188 + 0.00998 \\ &= 0.01186 \end{aligned}$$

- 1.186% aller Probanden verlassen die Untersuchung mit einem Verdacht

Röntgenreihenuntersuchung, Fortsetzung

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kranker nicht endeckt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Verdachtsdiagnose falsch?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine falsche Diagnose gestellt?

erste Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kranker nicht endeckt?
"Falsch negativer Befund": Krankheit übersehen

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0.94 = 0.06$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kranker für gesund gehalten wird, beträgt 6%

zweite Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Verdachtsdiagnose falsch?
"Falsch positiver Befund": Krankheit zu Unrecht diagnostiziert

$$
\begin{aligned}
P(B^c|A) &= 1 - P(B|A) \\
&= 1 - \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \\
&= 1 - \frac{0.94 \cdot 0.002}{0.01186} \\
&= 1 - 0.1585 \\
&= 0.8415
\end{aligned}
$$

Wer mit Verdachtsdiagnose aus der Röntgenreihenuntersuchung kam, war mit nahezu 85% Wahrscheinlichkeit **gesund.**

dritte Frage

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Fehldiagnose?

- Das ist eine totale Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) &= P(A|B^c) \cdot P(B^c) + P(A^c|B) \cdot P(B) \\ &= 0.06 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998 \\ &= 0.0101 \end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit einer Fehldiagnose beträgt 1.01%

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Zufallsvariable

- Zufallsexperiment wird durchgeführt, dessen Ergebnis ein Wert ist
- Das ist der Wert der Zufallsvariablen
- Zufallsvariablen heißen meist X, Y
- Mathematisch ausgedrückt: Eine Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis ω eine Zahl $X(\omega)$ zu
- Beispiel 10-facher Wurf eines fairen Würfels: Die Anzahl der Sechsen definiert eine Zufallsvariable X
- Zufallsvariable lenken den Blick auf die interessanten Daten, indem sie die Elementarereignisse ausblenden
- Eine Zufallsvariable heißt *diskret*, wenn alle ihre Werte ganze Zahlen sind

Interpretation

Wahrscheinlichkeitstheorie	Experiment
Zufallsvariable X	Messvorrichtung
Ereignisraum Ω	Menge aller möglichen Versuchsabläufe
Elementarereignis ω	beobachteter Versuchsablauf
Wert $X(\omega)$	beobachteter Messwert

Schreibweisen

X eine Zufallsvariable auf Ω. Wir schreiben zur Abkürzung (hierbei sind a und b irgendwelche Zahlen):

$$\{X = a\} = \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } X(\omega) = a\}$$
$$\{X \leq a\} = \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } X(\omega) \leq a\}$$
$$\{a < X \leq b\} = \{\text{alle Elementarereignisse } \omega, \text{ für die } a < X(\omega) \leq b\}$$

usw.

Beispiel zur Schreibweise

- Dreifacher Wurf einer fairen Münze, also $\Omega = \{A, Z\}^3$
- X bezeichne die Anzahl der Würfe mit "Adler". Dann kann X die Zahlen 0,1,2 und 3 annehmen
- $\{X = 2\} = \{(A, A, Z), (A, Z, A), (Z, A, A)\}$
- $P(X = 2) = \dfrac{3}{8} = 0.375$
- Statt $P(X = 2)$ schreibt man auch $P_X(2)$
- Dann ist P_X eine Verteilung auf den ganzen Zahlen