

# Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

<http://blog.ruediger-braun.net>

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

07. Januar 2015

# Klausuranmeldung

Prüflinge müssen sich bis spätestens 14 Tage vor der jeweiligen Prüfung im Studierendenportal anmelden. Eine ausführliche Beschreibung findet man [hier](#).

Ich darf nur angemeldete Teilnehmerinnen und Teilnehmer mitschreiben lassen!

1 Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

- Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung
- Poissonverteilung













## L-Bakterien: Fortsetzung

- Wenn weniger als 14 der Bakterien  $L$ -Bakterien gewesen wären, hätten wir das noch ungewöhnlicher gefunden
- Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit, dass von 27 Bakterien höchstens 14  $L$ -Bakterien sind,
- d. h. wir suchen

$$\sum_{k=0}^{14} B_{27,0.75}(k)$$

- Diese Zahlen findet man in Tabellen der kumulierten Binomialverteilung

Tabelle der Werte  $\sum_{k=0}^r B_{n,p}(k)$  für  $n = 27$ 

$r$	$p$	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79
9	0.	00001				
10		00003	00002	00001	00001	
11		00016	00010	00006	00003	00002
12		00067	00042	00026	00015	00009
13		00245	00161	00103	00065	00039
14		00778	00538	00364	00240	00153
15		02162	01573	01119	00777	00526
16		05278	04031	03016	02208	01577
17		11325	09067	07126	05488	04136
18		21405	17927	14769	11951	09483
19		35729	31217	26889	22804	19012
20		52917	48050	43120	38195	33350
21		70105	65819	61232	56385	51330
22		84168	81165	77770	73973	69777
23		93340	91729	89806	87530	84864
24		97926	97305	96521	95540	94322
25		99577	99423	99219	98948	98592
26		99958	99939	99914	99878	99828

## L-Bakterien: Fortsetzung

Mit Wahrscheinlichkeit 0.00778 sind von 27 Bakterien höchstens 14 *L*-Bakterien.  
Das legt den Verdacht nahe, dass das Pestizid hauptsächlich *L*-Bakterien angreift.

# Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung modelliert Wartezeiten in getakteten Modellen

# Geometrische Verteilung, Beispiel

Wurf eines fairen Würfels:

- Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall  $p = \frac{1}{6}$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf eine Sechs fällt, ist

$$\frac{1}{6} = 0.1667$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Sechs im zweiten Wurf fällt, ist

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.1389$$

## Beispiel, Fortsetzung

Wurf eines fairen Würfels:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Sechs im dritten Wurf fällt, ist

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0.1157$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Sechs im  $k$ -ten Wurf fällt, ist

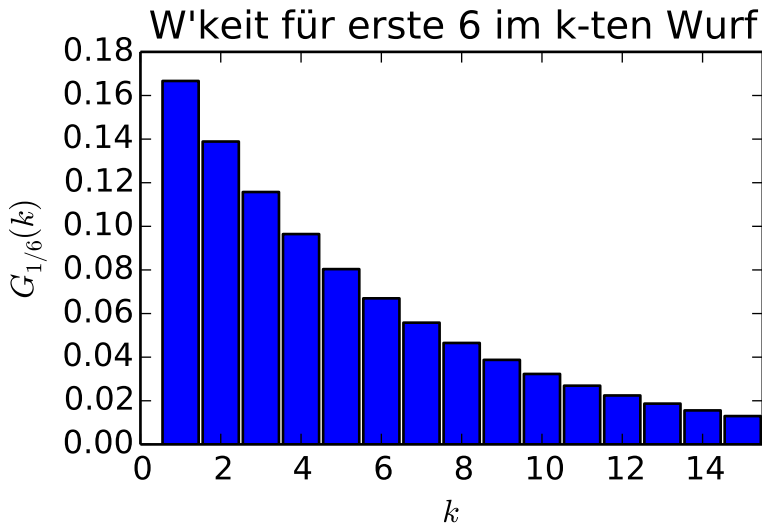
$$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

# Geometrische Verteilung: Definition

Die *geometrische Verteilung* zum Parameter  $p$  wird gegeben durch

$$G_p(k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

In einem ja/nein-Experiments, bei dem die Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall gleich  $p$  ist, gebe die Zufallsvariable  $X$  die Nummer des Zugs mit dem ersten Erfolg an. Dann ist  $X$  verteilt gemäß  $G_p$ .

Stabdiagramm von  $G_{1/6}$ 



## Geometrische Verteilung: Beispiel

In einer bestimmten Bucht beträgt im Juli die Wahrscheinlichkeit einer Walbeobachtung an einem zufällig ausgewählten Tag 15%

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht man 7 Tage lang keinen einzigen Wal?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man seinen ersten Wal am siebten Tag sieht?

# Walbeobachtung, Fortsetzung

Erste Frage:

*Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht man 7 Tage lang keinen einzigen Wal?*

- 7 unabhängige ja/nein-Experimente: Binomialverteilung
- Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall  $p = 0.15$
- gesucht: Wahrscheinlichkeit von 0 Erfolgen

$$B_{7,0.15}(0) = \binom{7}{0} p^0 (1-p)^7 = 0.85^7 = 0.3206$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass 7 Tage lang kein einziger Wal beobachtet wird, beträgt 32%

# Walbeobachtung, Fortsetzung

## Zweite Frage

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man seinen ersten Wal am siebten Tag sieht?*

- Wartezeit in getaktetem Modell: Geometrische Verteilung
- gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass erster Erfolg im siebten Versuch eintritt, wenn Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall  $p = 0.15$

$$G_{0.15}(7) = 0.85^6 \cdot 0.15 = 0.0566$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Walbeobachtung am siebten Tag statt findet, beträgt 5.7%

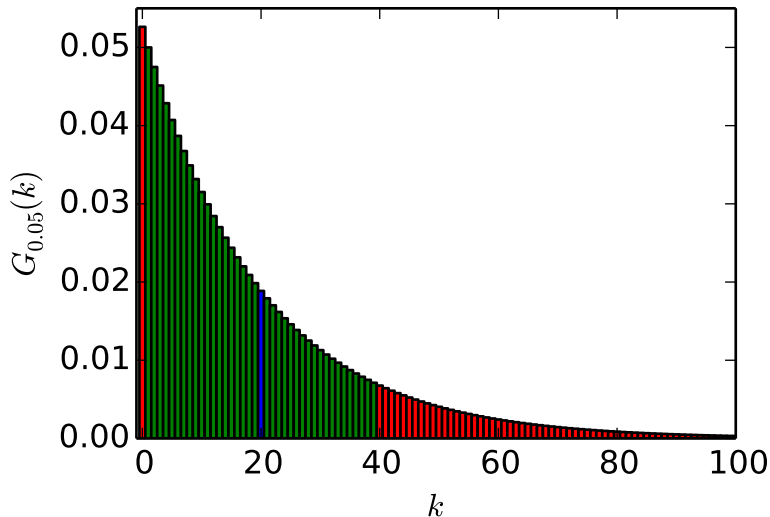
# Erwartungswert und Varianz für die geometrische Verteilung

Die Zufallsvariable  $X$  sei  $G_p$ -verteilt. Dann

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

## Stabdiagramm geometrische Verteilung



Geometrische Verteilung  $G_{0.05}$ . Der Erwartungswert ist blau, alles innerhalb der Standardabweichung ist grün.

## Beispiel: Walbeobachtung

In einer bestimmten Bucht beträgt im Juli die Wahrscheinlichkeit einer Walbeobachtung an einem zufällig ausgewählte Tag 15%

- Wie viele Tage mit Walbeobachtung gibt es im Mittel in einer Woche?
- An welchem Tag sieht man im Mittel den ersten Wal?

## Walbeobachtung: Erste Frage

*Wie viele Tage mit Walbeobachtung gibt es im Mittel in einer Woche?*

- Die Zufallsvariable  $X$  zählt die Tage mit Walbeobachtung in einer Woche
- $X$  ist  $B_{n,p}$ -verteilt für  $n = 7$  und  $p = 0.15$
- Also  $E(X) = n \cdot p = 7 \cdot 0.15 = 1.05$
- Im Mittel gibt es pro Woche 1.05 Tage mit Walbeobachtung

## Walbeobachtung: Zweite Frage

*An welchem Tag sieht man im Mittel den ersten Wal?*

- Die Zufallsvariable  $Y$  gibt den ersten Tag mit Walbeobachtung an.
- $Y$  ist  $G_p$ -verteilt für  $p = 0.15$
- Also  $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.15} = 6.667$
- Im Mittel ist der siebte Tag der erste mit Walbeobachtung



# Poissonverteilung

Die Poissonverteilung modelliert seltene Ereignisse

Selten bedeutet, dass sich die Einzelereignisse nicht beeinflussen

Es sei  $\lambda > 0$ . Die Poissonverteilung zum Parameter  $\lambda$  ist definiert durch

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

# Poissonverteilung, Bedeutung

Unter den folgenden Voraussetzungen ist eine Zufallsvariable  $X$  poissonverteilt zum Parameter  $\lambda$ :

- $X$  zählt das Auftreten eines Ereignisses pro Zählinheit
- Im Mittel treten  $\lambda$  Ereignisse pro Zählinheit auf
- Die Ereignisse beeinflussen sich nicht gegenseitig

## Beispiel: $\alpha$ -Strahlung

Versuchsaufbau:

- Wir beobachten die Einschläge von  $\alpha$ -Teilchen in einer Zelle
- Im Mittel gebe es einen Einschlag alle 11 Minuten, also 5.455 Einschläge pro Stunde.
- Welcher Prozentsatz der Zellen übersteht eine Stunde ohne Einschlag?

Es ist  $\lambda = 5.455$ , und wir suchen den Wert von  $P_\lambda$  für  $k = 0$

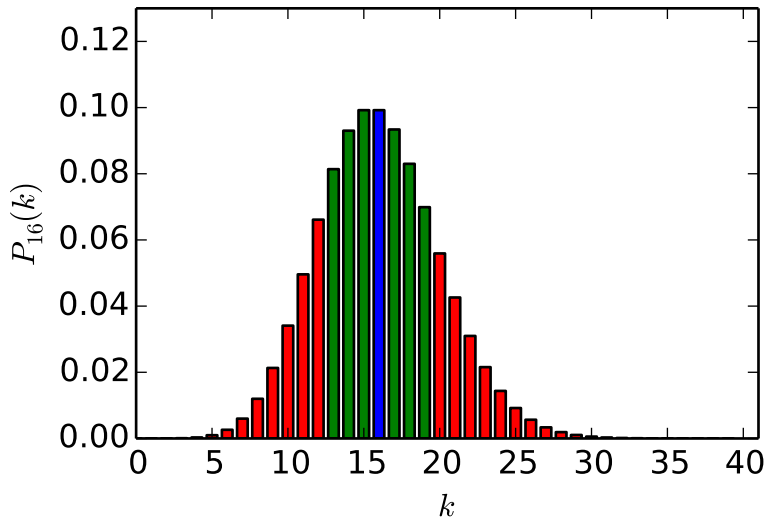
$$P_\lambda(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-5.455} = 0.004277$$

Nur ungefähr jede 230-te Zelle bleibt unbeschädigt





## Stabdiagramm Poissonverteilung



Poissonverteilung  $P_{16}$ . Der Erwartungswert ist blau, alles innerhalb der Standardabweichung ist grün.