# Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
http://blog.ruediger-braun.net

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

14. Januar 2015

# Testverfahren: Fehler erster und zweiter Art

- Ein *Test* besteht aus einer Vorschrift, die zu jedem möglichen Versuchsausgang festlegt, ob die Nullhypothese $H_0$ angenommen oder abgelehnt wird.
- Dabei kann es zu zwei verschiedenen Fehlentscheidungen kommen:

| | $H_0$ wird angenommen | $H_0$ wird abgelehnt |
|---|---|---|
| $H_0$ trifft zu | richtige Entscheidung | Fehler 1. Art |
| $H_1$ trifft zu | Fehler 2. Art | richtige Entscheidung |

# Signifikanztests

- Für den Fall, dass $H_0$ zutrifft, bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass $H_0$ trotzdem abgelehnt wird, als *Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art*
- Ein Test heißt *Signifikanztest* zum Niveau $\alpha$, wenn alle Fehlerwahrscheinlichkeiten erster Art $\leq \alpha$ sind
- Das übliche Niveau ist 0.05
- Für den Fall, dass $H_0$ nicht zutrifft, bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass $H_0$ trotzdem nicht abgelehnt wird, als *Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art*

# Ein- und zweiseitige Tests für Erfolgswahrscheinlichkeiten

- Ein ja/nein-Experiment mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit $p$ wird $n$-mal wiederholt
- Ziel: Aussage über $p$ relativ zu einem Referenzwert $p_0$
- verschiedene Nullhypothesen sind denkbar

$$\begin{array}{r|r} H_0 : p \geq p_0 & \text{einseitiger unterer Test} \\ H_0 : p \leq p_0 & \text{einseitiger oberer Test} \\ H_0 : p = p_0 & \text{zweiseitiger Test} \end{array}$$

- Die Nullhypothese $H_0 : p \neq p_0$ macht keinen Sinn

# Einseitiger unterer Binomialtest zum Niveau $\alpha$

- Gegeben sind unabhängige $B(1, p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem $p$ sowie ein Signifikanzniveau $\alpha$
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert $p_0$
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p \geq p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p < p_0\}$
- Der Wert $c$ ist so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} \leq \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} > \alpha$$

- $c$ heißt *kritischer Wert*

# Einseitiger unterer Binomialtest zum Niveau $\alpha$

- Entscheidungsregel:
  - Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Anzahl der Erfolge echt kleiner als $c$ ist
  - Die Nullhypothese wird beibehalten, falls die Anzahl der Erfolge mindestens $c$ ist

# Beispiel $L$-Bakterien

- Letztes Mal war die Frage

  *Schädigt das Pestizid L-Bakterien mehr als R-Bakterien?*

  zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ zu beantworten
- In unbelastetem Boden waren 75% aller Bakterien $L$-Bakterien
- Die Nullhypothese ist, dass der Anteil in belastetem Boden mindestens genauso groß ist
- Also $H_0 : p \geq p_0$ für $p_0 = 0.75$
- Tabelle: kritischer Wert $c = 16$
- Bei 15 oder weniger Erfolgen wird die Nullhypothese abgelehnt

# Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^{r} B_{n,p}(k)$ für $n = 27$

| $r$ | $p$ | 0.75 | 0.76 | 0.77 | 0.78 | 0.79 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 0. | 00001 | | | | |
| 10 | | 00003 | 00002 | 00001 | 00001 | |
| 11 | | 00016 | 00010 | 00006 | 00003 | 00002 |
| 12 | | 00067 | 00042 | 00026 | 00015 | 00009 |
| 13 | | 00245 | 00161 | 00103 | 00065 | 00039 |
| 14 | | 00778 | 00538 | 00364 | 00240 | 00153 |
| 15 | | 02162 | 01573 | 01119 | 00777 | 00526 |
| 16 | | 05278 | 04031 | 03016 | 02208 | 01577 |
| 17 | | 11325 | 09067 | 07126 | 05488 | 04136 |
| 18 | | 21405 | 17927 | 14769 | 11951 | 09483 |
| 19 | | 35729 | 31217 | 26889 | 22804 | 19012 |
| 20 | | 52917 | 48050 | 43120 | 38195 | 33350 |
| 21 | | 70105 | 65819 | 61232 | 56385 | 51330 |
| 22 | | 84168 | 81165 | 77770 | 73973 | 69777 |
| 23 | | 93340 | 91729 | 89806 | 87530 | 84864 |
| 24 | | 97926 | 97305 | 96521 | 95540 | 94322 |
| 25 | | 99577 | 99423 | 99219 | 98948 | 98592 |
| 26 | | 99958 | 99939 | 99914 | 99878 | 99828 |

# Einseitiger oberer Binomialtest zum Niveau $\alpha$

- Gegeben sind unabhängige $B(1, p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem $p$ sowie ein Signifikanzniveau $\alpha$
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert $p_0$
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p \leq p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p > p_0\}$
- Der kritische Wert $c$ ist so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} \geq 1 - \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1 - p_0)^{n-k} < 1 - \alpha$$

- Entscheidungsregel:
  - Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Anzahl der Erfolge echt größer als $c$ ist
  - Die Nullhypothese wird beibehalten, falls die Anzahl der Erfolge höchstens $c$ ist

# Beispiel zum oberen Binomialtest

- Zuchtlachsen wird Fischabfall und vegetarisches Futter zur Auswahl angboten
- 11% aller Lachse bevorzugen das Gemüse
- Die Lachse werden stufenweise an vegetarische Kost gewöhnt
- Die Frage

  *Bevorzugen sie das Gemüse nach der Umgewöhnung mit höherer Wahrscheinlichkeit als vorher?*

  soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ beantwortet werden
- Einseitiger, oberer Binomialtest mit Nullhypothese $H_0 = \{p \leq 0.11\}$
- Stichprobenumfang $n = 38$

# Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^{r} B_{n,p}(k)$ für $n = 38$

| r | p | 0.10 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0.14 | 0.15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0. | 01825 | 01193 | 00777 | 00503 | 00324 | 00208 |
| 1 | | 09530 | 06799 | 04802 | 03360 | 02330 | 01602 |
| 2 | | 25367 | 19616 | 14958 | 11259 | 08372 | 06154 |
| 3 | | 46484 | 38625 | 31576 | 25421 | 20174 | 15794 |
| 4 | | 67014 | 59183 | 51404 | 43938 | 36986 | 30680 |
| 5 | | 82525 | 76460 | 69790 | 62753 | 55596 | 48542 |
| 6 | | 92005 | 88205 | 83579 | 78216 | 72258 | 65879 |
| 7 | | 96819 | 94841 | 92175 | 88779 | 84658 | 79865 |
| 8 | | 98893 | 98020 | 96717 | 94895 | 92480 | 89428 |
| 9 | | 99660 | 99329 | 98782 | 97941 | 96724 | 95054 |
| 10 | | 99908 | 99798 | 99599 | 99261 | 98728 | 97933 |
| 11 | | 99978 | 99946 | 99882 | 99763 | 99558 | 99227 |
| 12 | | 99995 | 99987 | 99969 | 99932 | 99862 | 99740 |
| 13 | | 99999 | 99997 | 99993 | 99982 | 99962 | 99922 |
| 14 | | | 99999 | 99998 | 99996 | 99990 | 99979 |
| 15 | | | | | 99999 | 99998 | 99995 |
| 16 | | | | | | | 99999 |

# Beispiel Lachse, Fortsetzung

- die Tabelle zeigt $c = 8$
- die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Zahl der Erfolge mindestens 9 beträgt
- bei 8 oder weniger Erfolgen wird sie beibehalten

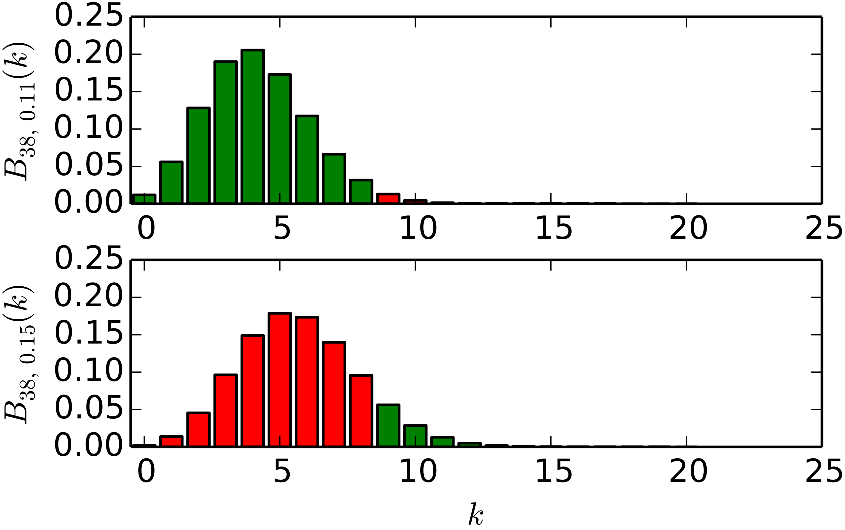
# Beispiel Lachs: Power des Tests

- Was ist die Power des Tests, wenn tatsächlich nach der Umgewöhnungsphase 15% der Lachse vegetarische Kost bevorzugen?
- Die Power ist die Wahrscheinlichkeit, bei Vorliegen der Alternative die Nullhypothese auch tatsächlich abzulehnen
- Die Power hängt davon ab, wie kleine Abweichungen von der Nullhypothese man entdecken will: kleine Abweichungen $\Rightarrow$ kleine Power
- $H_0$ wird abgelehnt bei mindestens 9 Erfolgen
- Im Beispiel $p = 0.15$
- Also ist die Power gleich

$$\sum_{k=9}^{38} B_{38,0.15}(k) = 1 - \sum_{k=0}^{8} B_{38,0.15}(k) = 1 - 0.89428 = 0.10572$$

- Die Power beträgt nur ungefähr 10%

# Power, Fortsetzung




Rote Balken zeigen Fehlentscheidungen

# Zweiseitiger Binomialtest zum Niveau $\alpha$

- Gegeben sind unabhängige $B(1, p)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem $p$ sowie ein Signifikanzniveau $\alpha$
- Verglichen werden soll mit einem Referenzwert $p_0$
- Getestet wird die Nullhypothese $H_0 = \{p = p_0\}$ gegen die Alternative $H_1 = \{p \neq p_0\}$
- Idee: Man testet $\{p \leq p_0\}$ zum Signifikanzniveau $\frac{\alpha}{2}$ und dann $\{p \geq p_0\}$ zum Signifikanzniveau $\frac{\alpha}{2}$
- $H_0$ wird abgelehnt, wenn einer der beiden Tests zur Ablehnung führt

# Zweiseitiger Binomialtest zum Niveau $\alpha$

Die kritischen Werte $c_1$ und $c_2$ sind so zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{c_1-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} > \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_2} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} \geq 1-\frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{c_2-1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k} < 1-\frac{\alpha}{2}$$

# Entscheidungsregel:

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Anzahl der Erfolge echt kleiner als $c_1$ oder echt größer als $c_2$ ist
- Die Nullhypothese wird beibehalten, wenn die Anzahl der Erfolge $c_1$ nicht unter- und $c_2$ nicht überschreitet

# Zweiseitiger Binomialtest, Beispiel

- Bei 250 Würfen eines Würfels fiel 55 mal eine Sechs. Kann man zu 95% sicher sein, dass der Würfel gezinkt ist?
- Sei $p$ die unbekannte Wahrscheinlichkeit des Würfels für eine Sechs
- Zweiseitiger Binomialtest mit

$$\begin{aligned} &\textit{Nullhypothese: } H_0 = \left\{p = \tfrac{1}{6}\right\} \\ &\textit{Alternative: } H_1 = \left\{p \neq \tfrac{1}{6}\right\} \end{aligned}$$

- Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$

# Tabelle von $\sum_{k=0}^{n} B_{250,\,1/6}(k)$

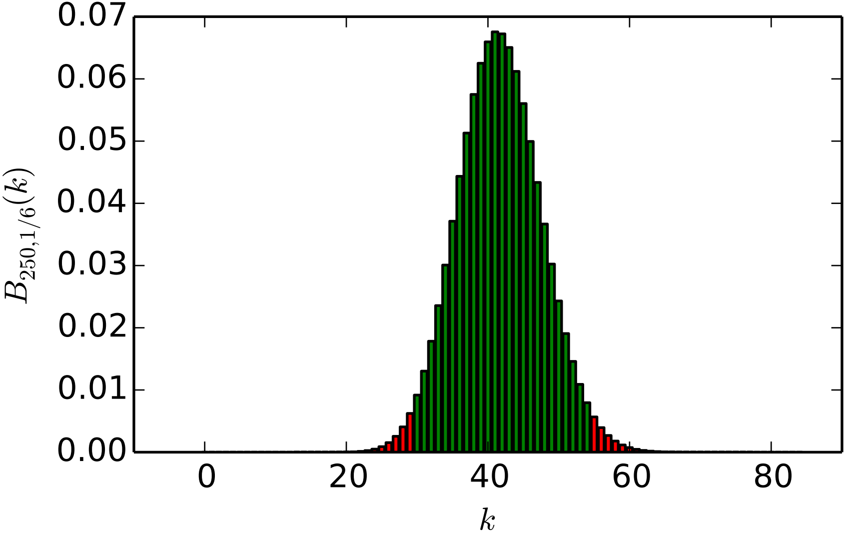
| $r$ | $p$ | $\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|
| 20 | 0. | 00005 |
| 21 | | 00011 |
| 22 | | 00024 |
| 23 | | 00050 |
| 24 | | 00100 |
| 25 | | 00189 |
| 26 | | 00343 |
| 27 | | 00598 |
| 28 | | 01005 |
| 29 | | 01628 |
| 30 | | 02546 |
| 31 | | 03849 |
| 32 | | 05632 |
| 33 | | 07989 |
| 34 | | 10997 |
| 35 | | 14709 |
| 36 | | 19143 |
| 37 | | 24273 |
| 38 | | 30023 |
| 39 | | 36275 |

| $r$ | $p$ | $\frac{1}{6}$ |
|---|---|---|
| 40 | 0. | 42870 |
| 41 | | 49627 |
| 42 | | 56351 |
| 43 | | 62856 |
| 44 | | 68977 |
| 45 | | 74581 |
| 46 | | 79576 |
| 47 | | 83912 |
| 48 | | 87579 |
| 49 | | 90603 |
| 50 | | 93034 |
| 51 | | 94941 |
| 52 | | 96400 |
| 53 | | 97491 |
| 54 | | 98286 |
| 55 | | 98853 |
| 56 | | 99248 |
| 57 | | 99517 |
| 58 | | 99696 |
| 59 | | 99812 |

# Beispiel, Fortsetzung

- $c_1 = 30$ und $c_2 = 54$
- Die Nullhypothese kann zum Niveau $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden, wenn höchstens 29 oder mindestens 55 Sechsen fallen
- Bei 55 Sechsen kann die Nullhypothese also abgelehnt werden
- Wir können mit 95% Sicherheit sagen, dass der Würfel gezinkt ist

# Beispiel, Fortsetzung




Rote Balken zeigen Fehlentscheidungen