Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun
http://blog.ruediger-braun.net

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

28. Januar 2015

Signifikanztests

- Die Statistik gibt auf jede Frage eine von zwei möglichen Antworten
  - H_0 wird abgelehnt
  - H_0 wird beibehalten
- Das bedeutet in der Theorie
  - Ablehnung von H_0: Der Nachweis ist zum geforderten Signifikanzniveau geführt
  - Beibehaltung von H_0: Ergebnis ist unklar
- In der Praxis
  - Ablehnung von H_0: Der Nachweis ist zum geforderten Signifikanzniveau geführt
  - Beibehaltung von H_0: Wenn der Stichprobenumfang so groß ist, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art klein ist, dann wertet man des Experiment als Indiz für die Nullhypothese

χ^2-Tests

Beispiel Geburten pro Wochentag

In einem amerikanischen Krankenhaus wurden im Jahr 1999 die folgenden Anzahlen an Geburten beobachtet

Wochentag	Tage im Jahr	Anzahl Geburten
Montag	52	41
Dienstag	52	63
Mittwoch	52	63
Donnerstag	52	47
Freitag	53	56
Samstag	52	47
Sonntag	52	33

Sind diese Zahlen mit der Nullhypothese vereinbar, dass Geburten an allen Wochentagen gleich häufig auftreten? Diese Frage soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ beantwortet werden.

Test auf Übereinstimmung der Daten mit einer Verteilung

- Unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$, die alle mit Wahrscheinlichkeit p_1 den Wert w_1, mit Wahrscheinlichkeit p_2 den Wert w_2, ..., mit Wahrscheinlichkeit p_s den Wert w_s annehmen
- Vergleichswahrscheinlichkeiten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ mit $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_s = 1$
- Nullhypothese und Alternative:

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & p_1 = \pi_1, p_2 = \pi_2, \ldots, p_s = \pi_s \\ H_1 & : & \text{mindestens ein } p_j \neq \pi_j \end{array}$$

Test auf Übereinstimmung mit einer Verteilung: Summenvariable

- Summenvariable

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \text{Anzahl aller } X_j \text{ mit } X_j = w_1 \\
Y_2 &= \text{Anzahl aller } X_j \text{ mit } X_j = w_2 \\
&\vdots \\
Y_s &= \text{Anzahl aller } X_j \text{ mit } X_j = w_s
\end{aligned}
$$

- Erwartungswerte unter H_0

$$
\begin{aligned}
E(Y_1) &= n \cdot \pi_1 \\
E(Y_2) &= n \cdot \pi_2 \\
&\vdots \\
E(Y_s) &= n \cdot \pi_s
\end{aligned}
$$

χ^2-Verteilung

- Die Quantile der χ^2-Verteilung sind die Referenzgröße beim Vergleich zweier Verteilungen für große Stichprobenumfänge
- Sprich: "Chi-Quadrat"
- Die χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden besitzt die Dichte

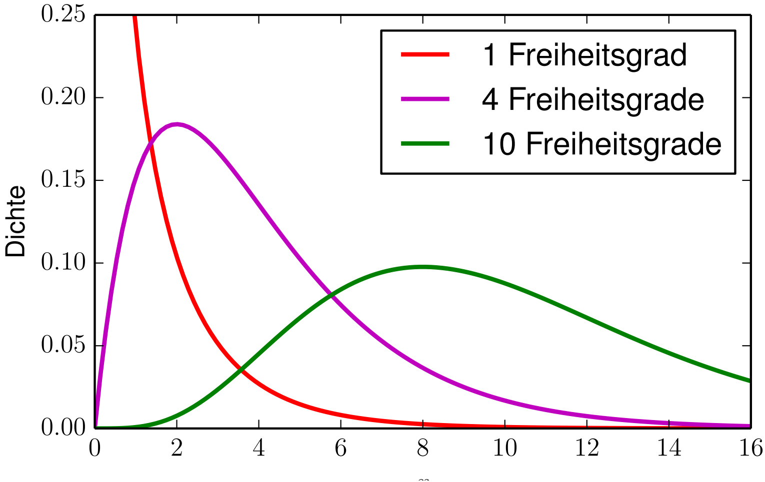
$$f_n(x) = c_n \cdot e^{-x/2} \cdot x^{n/2-1}, \qquad x > 0$$

- Dabei ist c_n bestimmt durch das Erfordenis, dass

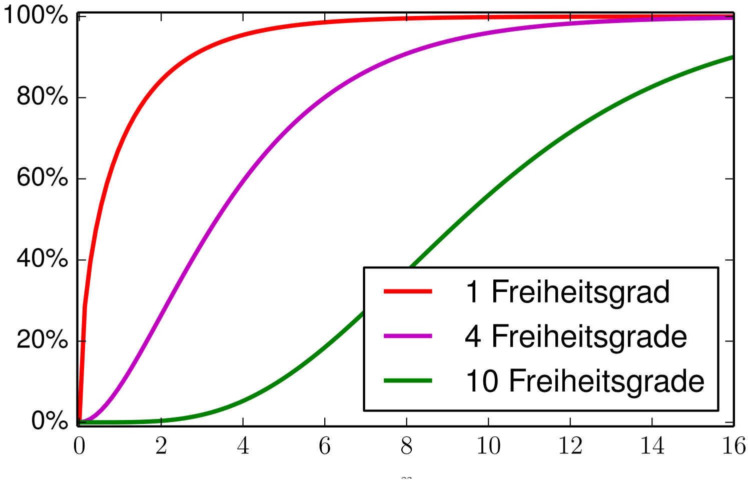
$$\int_0^\infty f_n(x) dx = 1$$

- Die Quantile der χ^2-Verteilung sind tabelliert

Graphen von Dichten von χ^2-Verteilungen



Graphen von Verteilungsfunktionen von χ^2-Verteilungen



Quantile der χ^2-Verteilung

f	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50

χ^2-Test auf Übereinstimmung mit einer gegebenen Verteilung

- Gegeben ein Signifikanzniveau α
- Berechne Teststatistik

$$t = \sum_{j=1}^{s} \frac{(y_j - n \cdot \pi_j)^2}{n \cdot \pi_j}$$

- Bestimme Quantil $\chi^2_{s-1,1-\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit $s-1$ Freiheitsgraden
- Falls

$$t \geq \chi^2_{s-1,1-\alpha}$$

  dann lehne H_0 ab

Bemerkungen zum χ^2-Test

- Der χ^2-Test verwendet eine Approximation
- Er ist daher nur zulässig, wenn

$$\begin{aligned} n \cdot \pi_1 &\geq 5 \\ n \cdot \pi_2 &\geq 5 \\ &\vdots \\ n \cdot \pi_s &\geq 5 \end{aligned}$$

- Die Zahl der Freiheitgrade beträgt $s - 1$

Beispiel Geburten

	beobachtet	erwartet	
Tag	y_j	$n \cdot \pi_j$	$\frac{(y_j - n \cdot \pi_j)^2}{n \cdot \pi_j}$
Montag	41	49.86	1.57
Dienstag	63	49.86	3.46
Mittwoch	63	49.86	3.46
Donnerstag	47	49.86	0.16
Freitag	56	50.82	0.53
Samstag	47	49.86	0.16
Sonntag	33	49.86	5.70
$\sum$	350	350	15.04

Der Wert der Teststatistik ist $t = 15.04$. Das Quantil ist $\chi^2_{6,0.95} = 12.59$.

H_0 kann abgelehnt werden. Die Geburtenverteilung ist merkwürdig.

Der p-Wert ist sogar besser als 0.025

χ^2-Unabhängigkeitstest

- Der Unabhängigkeitstest überprüft, ob zwei Merkmale stochastisch unabhängig sind.
- Im Beispiel wird Merkmal 1 die Erkrankung an einem Parasiten und Merkmal 2 der Tod durch einen Reiher sein
- Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig mit gleicher Verteilung
- Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ sind unabhängig mit gleicher, aber möglicherweise anderer Verteilung
- Die Zufallsvariable X_j beschreibt ein Merkmal mit den Ausprägungen $w_1, \ldots, w_s$
- Die Zufallsvariable Y_j beschreibt ein Merkmal mit den Ausprägungen $v_1, \ldots, v_r$
- Die Nullhypothese ist $P(X_1 = w_\ell,\ Y_1 = v_k) = P(X_1 = w_\ell) \cdot P(Y_1 = v_k)$

Kontingenztafel

- Der Stichprobenumfang sei n
- Wir stellen die Kontingenztafel auf

	v_1	v_2	$\ldots$	v_r	$\sum$
w_1	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$		$n_{1,r}$	M_1
w_2	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$		$n_{2,r}$	M_2
$\vdots$					
w_s	$n_{s,1}$	$n_{s,2}$		$n_{s,r}$	M_s
$\sum$	N_1	N_2		N_r	n

- Dabei ist $n_{\ell,k}$ die Anzahl der Individuen mit der Merkmalkombination w_ℓ, v_k
- Bei $r = s = 2$ spricht man von einem *Vierfeldertest*

χ^2-Unabhängigkeitstest, Fortsetzung

- Wir vergleichen die Kontingenztafel mit den erwarteten Werten unter H_0

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & v_1 & v_2 & \dots & v_r & \sum \\
\hline
w_1 & e_{1,1} & e_{1,2} & & e_{1,r} & M_1 \\
w_2 & e_{2,1} & e_{2,2} & & e_{2,r} & M_2 \\
\vdots & & & & & \\
w_s & e_{s,1} & e_{s,2} & & e_{s,r} & M_s \\
\hline
\sum & N_1 & N_2 & & N_r & n
\end{array}
$$

- Hierbei ist

$$e_{\ell,k} = \frac{M_\ell \cdot N_k}{n}$$

die erwartetete Anzahl an Individuen mit der Merkmalskombination w_ℓ, v_k unter H_0

- Wir vergleichen die beiden Tafeln durch einen χ^2-Test

χ^2-Unabhängigkeitstest, Teststatistik

- Die Teststatistik des Unabhängigkeitstests ist

$$t = \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_{\ell,k} - e_{\ell,k})^2}{e_{\ell,k}}$$

- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $(s-1) \cdot (r-1)$
- Zum Signifikanzniveau α wird das Quantil $\chi^2_{(s-1)\cdot(r-1),\,1-\alpha}$ benötigt

Beispiel: Parasit

- Ein Parasit aus der Klasse der Saugwürmer lebt als erwachsenes Tier in Vögeln
- Die Eier entwickeln sich in Schnecken
- Wenn eine befallene Schnecke von einem Fisch gefressen wird, besiedelt der Saugwurm das Gehirn des Fischs
- Wenn der Fisch von einem Reiher gefressen wird, beginnt der Zyklus von neuem
- Es fällt auf, dass befallene Fische gerne an der Oberfläche schwimmen, wo sie eine leichte Beute für Reiher sind
- Das soll durch einen χ^2-Unabhängigkeitstest überprüft werden

Daten des Saugwurm-Experiments

- Kontingenztafel

Reiheropfer?	gesund	leichter Befall	starker Befall	$\sum$
ja	1	10	37	48
nein	49	35	9	93
$\sum$	50	45	46	141

- erwartete Werte unter H_0

Reiheropfer?	gesund	leichter Befall	starker Befall	$\sum$
ja	17.0	15.3	15.7	48.0
nein	33.0	29.7	30.3	93.0
$\sum$	50.0	45.0	46.0	141.0

- Tabelle der Werte $\frac{(n_{\ell,k}-e_{\ell,k})^2}{e_{\ell,k}}$

Reiheropfer?	gesund	leichter Befall	starker Befall	$\sum$
ja	15.1	1.8	28.9	45.8
nein	7.8	0.9	15.0	23.7
$\sum$	22.9	2.7	43.9	69.5

Teststatistik für das Saugwurm-Experiment

- Das Signifikanzniveau sei $\alpha = 0.01$
- Die Teststatistik ist $t = 69.5$
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $(3 - 1) \cdot (2 - 1) = 2$
- Das benötigte Quantil ist
$$\chi^2_{2,\,0.99} = 9.21$$
- H_0 wird abgelehnt
- Der Parasit beeinflusst das Verhalten des Fischs

Übungspunkte

- Es gab insgesamt 283 Übungspunkte
- Für jeden Studierenden werden die Übungspunkte zusammengerechnet
- **Dann werden 15 Punkte "Korrekturfehlerpauschale" addiert**
- Beschwerden werden nur akzeptiert, wenn die Punktezahl um mehr als diese 15 Punkte steigt. Dann wird der die 15 Punkte übersteigende Anteil hinzugezählt.
- Beispiel: Herr X hat 180 Punkte. Dann werden 195 Punkte in Klausurpunkte umgerechnet ($=$ 4 Klausurpunkte).
- Drei Aufgaben von Herrn X wurden übersehen. Dadurch entgingen Herrn X 18 Punkte. Nach der Beschwerde werden 198 Punkte in Klausurpunkte umgerechnet ($=$ 4 Klausurpunkte)

Übungspunkte, Fortsetzung

- Die Klausurpunkte werden über das Studierendenportal mitgeteilt. Diese Mitteilung erhält, wer mindestens einen Klausurpunkt erworben hat.
- Nachfragen richten Sie bitte an die Korrektoren

  Korrektorenzimmer 25.13.U1.31

  Die Sprechzeiten der Korrektoren findet man unter
  `http://blog.ruediger-braun.net/?p=1111`