

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $f(x) := x^{4/7}$ und $g(x) := \sqrt[7]{x^4}$. Überlegen Sie sich, ob sich die beiden Funktionen unterscheiden. Welche Funktion bildet \mathbb{R} nach \mathbb{R} ab? Überprüfen Sie Ihre Überlegungen, indem Sie jeweils die Real- und Imaginärteile von f und g zeichnen. Machen Sie das so, dass Sie für f und g jeweils einen Plot anfertigen und diese beiden Zeichnungen in einer Figur nebeneinander setzen.

2. Betrachten Sie die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \geq 1, \\ g(x), & x < 1, \end{cases}$$

mit

$$f(x) := x^2 \sin(\pi x) \text{ und } g(x) := (x-1)e^x.$$

Überzeugen Sie sich zuerst mittels **limit**, dass h stetig an der Stelle $x = 1$ ist. Bestimmen Sie dann die Stammfunktionen $F := \int f(x) dx$, $G := \int g(x) dx$ und $H := \int h(x) dx$. Warum unterscheiden sich H und

$$x \mapsto \begin{cases} F(x), & x \geq 1, \\ G(x), & x < 1? \end{cases}$$

3. In der Vorlesung hatte `nsolve` zur Lösung der Gleichung

$$\tan x = x$$

den Vorschlag $\xi_0 = -0.000510846762348789$ gemacht. Sammeln Sie Argumente, ob dieser Wert sinnvoll in dem Sinn ist, dass es eine Nullstelle gibt, deren erste zehn Nachkommastellen mit ξ_0 übereinstimmen.

Hinweis: Die Aufgabe ist absichtlich vage formuliert. Sie sollten für sich selbst ein begründetes Urteil fällen. Einen ausformulierten Beweis brauchen Sie nicht abzugeben.

4. Schreiben Sie eine Funktion, welche der Zahl $a > 1$ die positive Lösung der Gleichung

$$e^{x+1} - a(x+1) - a^2 = 0$$

zuordnet. Dieses Programm soll ein numerisches Verfahren verwenden. Um einen Startwert zu erraten, zeichnen Sie zunächst die linke Seite der Gleichung für einige Werte von a .

Lösen Sie anschließend die Gleichung symbolisch. Zeichnen Sie nun die numerische und die symbolische Lösungsfunktion über dem Intervall $[2, 20]$ in ein Bild.

Überraschung! Lesen Sie nun den Teil von Lektion 9, der sich mit der Zweigwahl von `LambertW` beschäftigt, noch einmal durch. Ändern Sie die symbolische Lösung so ab (z. B. mit `replace`), dass sie mit der numerischen Lösung übereinstimmt.



Frohe Weihnachten!