Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun
D. Kerkmann

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 10.01.2019

Blatt 11

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Es seien $x_1, \ldots, x_6$ Unbestimmte. Erstellen Sie für $n = 2, \ldots, 5$ die Vandermonde Matrix
$$V_n = \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$
indem Sie den Konstruktor `Matrix` mit einer Funktion aufrufen (also ähnlich wie bei den Hilbert-Matrizen in der Vorlesung). Berechnen Sie jeweils die Determinante von V_n und faktorisieren Sie diese.

   Hinweis: Für $n = 6$ wird es schon schwierig. Man kann unter `?V.det` nachsehen, welche alternativen Verfahren angeboten werden. Wenn man dann auf überflüssige Ausgaben von Zwischenergebnissen verzichtet, ist $n = 6$ in unter einer Minute zu schaffen. Daher ist $n = 6$ optional.

2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2a-1 & 2a+2 & 2a+1 \\ a & -a & -a+1 \end{pmatrix}$$
gegeben.

   (a) Berechnen Sie $\det(A)$. Wenn nicht $a + 1$ herauskommt, haben Sie die Matrix falsch eingegeben. In diesem Fall korrigieren Sie bitte zuerst den Eingabefehler.

   (b) Diagonalisieren Sie A.

   (c) Bestimmen Sie für die drei Eigenvektoren jeweils die euklidische Norm.
   Hinweis: $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v}$ für reelle Vektoren v .

   (d) Es gibt einen Wert a_0 für a, der dazu führt, dass einer der Eigenvektoren keine endliche Norm hat (also in Wahrheit gar nicht existiert). Welcher Wert ist das? Es genügt, ihn abzulesen.

   (e) Ist A im Spezialfall $a = a_0$ diagonalisierbar?

3. Die Kugelkoordinaten sind definiert durch

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von Ψ. An welchen Punkten verschwindet sie?

   Hinweis: Bauen Sie die Matrix gliedweise auf, indem Sie die partiellen Ableitungen bestimmen. (Will sagen: Eine Funktion zur Bestimmung der Jacobi-Matrix ist nicht nötig.)

4. Erstellen Sie eine Klasse `Moebius`, welche aus den 2×2-Matrizen mit Determinante 1 besteht, d. h. aus den Elementen von $SL_2(R)$ für einen Ring R. (Der Charm von Python ist, dass dieser Ring nie präzisiert werden muss.)

   Die Konstuktion eines Objektes soll geschehen mittels

```
A = Moebius(a,b,c,d)
```

   Die binäre Operation `A*B` und die Potenzen `A**n`, $n \in \mathbb{Z}$, sollen implementiert werden. Auf Effizienz braucht kein Wert gelegt zu werden, aber die Klasse `Matrix` von `sympy` darf nur für die Ausgabe verwendet werden. Die Inverse bekommt man in diesem Fall am leichtesten über die Cramersche Regel:

   Wenn nämlich

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1}$$

   invertierbar ist, dann

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Ein Gerüst für die Klasse steht bereit auf
   `https://github.com/Ruediger-Braun/compana18/raw/master/blatt11_a4_geruest.ipynb`

Besprechung: 14. bis 18. Januar