Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun
D. Kerkmann

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 17.01.2019

Blatt 12

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. In dieser Aufgabe soll die Funktion

$$f(x,y) := -\cos(y)\cosh(x) - 4y$$

über dem Rechteck $[-5,5] \times [-1,4]$ untersucht werden.

   (a) Erstellen Sie zuerst eine zweidimensionale, farbcodierte Zeichnung mit `imshow`. Achten Sie darauf, die Achsen mit den echten x- und y-Werten zu beschriften.

   (b) Die Zeichnung aus Teil (a) lässt die Existenz von zwei Sätteln vermuten. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f, also die Nullstellen des Gradienten, symbolisch.

   (c) Diese Nullstellen sind nicht alle reell. Erstellen Sie eine Liste der reellen Nullstellen und zeichnen Sie diese Punkte als weiße Kreise in die Zeichnung ein.

   (d) Erstellen Sie nun eine dreidimensionale Zeichnung mit `plot_surface`. Benutzen Sie die Option `norm`, um eine kleine Umgebung des Sattels farbig zu markieren.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 37-8\,a & 3 & 33-8\,a \\ -1 & -6+a & -3 & -8+a \\ -1 & 2-a & -3 & -a \end{pmatrix}.$$

   (a) Die Matrix A_1 bestehe aus den ersten drei Spalten von A und die Matrix A_2 aus den letzten drei Spalten von A. Berechnen Sie $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$.
   Hinweis: Wenn $\det(A_1) + \det(A_2) \neq 0$, dann haben Sie sich bei der Eingabe der Matrix vertippt.

   (b) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der Rang von A gleich 2 ist.
   Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, was $\det(A_1) \neq 0$ für den Rang von A impliziert.

3. Betrachten Sie das Definitheitsverhalten der Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gehen Sie dazu für jedes der drei Matrizen wie folgt vor:

   (a) Stellen Sie das Definitheitsverhalten mittels des Hurwitz-Kriteriums fest, falls es anwendbar ist. Andernfalls begründen Sie, warum es nicht anwendbar ist.

   (b) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und deren Vorzeichen. Falls das Hurwitz-Kriterium anwendbar ist, überprüfen Sie nun Ihre Antwort aus (a).

4. Programmieren Sie symbolisch den Gauß-Algorithums, um eine Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen. Erproben Sie Ihr Programm an der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2x+2 & 2y-2 \\ 2x+2 & -2y+2 \\ y-1 & x+1 \end{pmatrix}$$

aus der Vorlesung, an der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie an den Matrizen $V_2, \ldots, V_5$ aus Aufgabe 1 von Blatt 11.

Hinweis: Beim Gauß-Algorithmus wird geteilt. Daher kommt nicht dasselbe wie in der Vorlesung heraus.

Sie müssen nicht nachhalten, für welche Werte der möglicherweise auftretenden Symbole Ihre Divisionen durch rationale Funktionen in diesen Symbolen gültig sind. Achten Sie nur darauf, nicht durch das Nullpolynom zu teilen.

Besprechung: 21. bis 25. Januar