Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun
D. Kerkmann

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 24.01.2019

Blatt 13

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Für $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' = -ay' + by + \cos(t)$$

gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

   (b) Für eine Wahl von a und b ist die unter (a) gefundene Lösung gar nicht definiert. Bestimmen Sie diese Parameter und lösen Sie die Differentialgleichung für diesen Fall noch einmal.

   (c) Für gewisse Wahlen von a und b wurden in (a) nicht alle Lösungen gefunden. Bestimmen Sie dieses b in Abhängigkeit von a und lösen Sie die Differentialgleichung für diesen Fall noch einmal.

   (d) Lösen Sie für $a = 1$ und $b = -1$ das durch $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ gegebene Anfangsproblem und zeichnen Sie die Lösung über einem Intervall, das drei bis fünf Nullstellen der Lösung enthält.

   (e) Seien a und b die in Aufgabenteil (b) gefundenen Werte. Lösen Sie wieder das durch $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ gegebene Anfangsproblem und zeichnen Sie die Lösung über demselben Intervall wie in Teil (d).

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y'' &= w - y + \cos(2t) \\ w'' &= 3w + 2y. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie durch Ansatz

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 \cos(2t) + a_1 \sin(2t), \\ w(t) &= b_0 \cos(2t) + b_1 \sin(2t), \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung. Führen Sie die Probe durch.

3. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2\sqrt{xy}$$

mit `dsolve`. Zeichnen Sie für $w_1 = \frac{1}{10}$ und $w_2 = \frac{1}{2}$ die Lösungen für die Anfangsbedingungen $y(\frac{1}{2}) = w_1, w_2$. Der besseren Übersicht halber beschränken Sie bitte den Definitionsbereich auf das Intervall $[0, 1.5]$.

Schneiden sich Ihre Kurven etwa? Dann überlegen Sie sich bitte, ob die Kurvenverläufe in Übereinstimmung mit dem Satz von Picard-Lindelöf stehen.

Fügen Sie nun zur Zeichnung das Richtungsfeld der Differentialgleichung hinzu.

Erklären Sie in wenigen Zeilen, welche Kurvenabschnitte zur Lösung gehören.

4. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \cos^2(y)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = \frac{\pi}{3}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$ und $y(0) = \pi$. Aus dem Satz von Picard-Lindelöf und seinen Folgerungen wissen Sie, dass die Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ existieren. Zeichnen Sie sie über dem Intervall $[-5, 5]$.

Besprechung: 28. Januar bis 1. Februar