

## Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Bestimmen Sie das kleinste  $n \in \mathbb{N}_0$ , für das

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\cos(\pi x) + 1) \sin(\pi x)}{(x + 1)^n}$$

einen von 0 verschiedenen endlichen Wert besitzt.

*Hinweis:* Man muss nur wenige  $n$  ausprobieren. Das geht von Hand, aber Sie dürfen auch eine Schleife programmieren.

2. Aus der Analysis I wissen Sie, dass die  $n$ -te Ableitung von

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

von der Gestalt  $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$  ist, wobei  $p_n(y)$  ein Polynom ist.

- (a) Bestimmen Sie  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ .  
(b) Verifizieren Sie, dass  $\frac{p_{100}(y)}{y^{101}}$  ein Polynom ist.

*Hinweis:* Das geht am einfachsten, indem man  $y = 0$  in den Quotienten einsetzt.

3. Es sei

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{4 + 2 \cos(x) + \sin(x)}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .  
(b) Bestimmen Sie das bestimmte Integral  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  direkt.  
(c) Bestimmen Sie das bestimmte Integral aus Teil (b) mittels der Stammfunktion aus Teil (a).  
(d) Bestimmen Sie das bestimmte Integral aus Teil (b) numerisch und vergleichen Sie mit dem numerischen Wert des Ergebnisses aus Teil (c).

4. Es sei  $F$  die Stammfunktion aus Aufgabe 3. Sie hat die Gestalt

$$F = p + t + s,$$

wobei  $p$  eine lineare Funktion,  $t$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion und  $s$  eine Funktion ist, welche abgesehen von Sprüngen konstant ist.

(a) Isolieren Sie die Funktionen  $p$ ,  $t$  und  $s$ .

*Hinweis:* Wenn Sie  $F$  bestimmt haben, können Sie die drei Bestandteile leicht ablesen; dieser Prozess braucht nicht automatisiert zu werden. Sie sollen aber die Bestandteile isolieren, ohne sie abzutippen (oder, was das gleiche wäre, mit der Maus zu kopieren).

(b) Zeichnen Sie dann die Graphen von  $F$ ,  $p$  und  $t$  in ein Bild. Wenn Sie noch Energie haben, zeichnen Sie  $t$  so, dass die Kurve an den Sprüngen nicht durchgezogen wird.

(c) Wiederholen Sie dann Teil (a), wenn in der Funktion  $f$  die Zahl 4 durch  $-4$  ersetzt wird.

**Besprechung:** 3. bis 7. Dezember