Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun
D. Kerkmann

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 13.12.2018

Blatt 9

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Wie in Aufgabe 1 von Blatt 7 sei
$$f(x) = \frac{(\cos(\pi x) + 1)\sin(\pi x)}{(x+1)^n}.$$
Damals war das kleinste n gesucht, so dass $\lim_{x\to -1} f(x)$ einen endlichen Wert besitzt. Lösen Sie diese Aufgabe nun, indem Sie den Zähler in eine Reihe um $x_0 = -1$ entwicklen.

2. Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \cos(x)e^{-x^2/200}.$$
Bestimmen Sie die Entwicklungen von f in $x = 0$ mit Fehlertermen $O\big(x^{25}\big)$, $O\big(x^{50}\big)$ und $O\big(x^{100}\big)$.

   Zeichnen Sie alle vier Funktionen in ein Bild. Achten Sie darauf, Definitions- und Wertebereich so zu wählen, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

3. Betrachten Sie die durch
$$f(x) := \sqrt{1234}^{\log|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
gegebene Funktion.
   (a) Besitzt Sie einen Grenzwert in 0?
   (b) Bestimmen Sie das größte $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $f(x) = O(|x|^m)$ für $x \to 0$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Reihenentwicklungen für die Ordnungsterme $O(|x|^n)$ für verschiedene n.
   (c) Untermauern Sie das Ergebnis von Teil (b) dadurch, dass Sie f zusammen mit geeigneten Vergleichskurven zeichnen.

4. Es sei $f(a)$ die positive Lösung der Gleichung
$$2 - x = a\ln(x).$$
In der Vorlesung hatten wir $f(a) = 1 + \frac{1}{a} + O\big(\frac{1}{a^2}\big)$ herausbekommen. Besorgen Sie sich eine Entwicklung der Form
$$f(a) = \sum_{j=0}^{5} b_j a^{-j} + O\left(\frac{1}{a^6}\right)$$
auf die folgende Weise:

   Erzeugen Sie einen Ausdruck $\sum_{j=0}^{5} b_j a^{-j}$ mit unbekannten b_j und setzen Sie ihn in die Gleichung ein. Entwickeln Sie diesen Ausdruck in eine Reihe und machen Sie einen Koeffizientenvergleich.

   Hinweis: Man erhält ein Tupel von Symbolen durch `symbols(b0:6)`.

   Wenn man mit der geforderten Genauigkeit rechnet, benötigt `sympy` zur Bestimmung der Reihe ungefähr zwei Minuten. Experimentieren Sie daher zuerst mit kleineren Ordnungen.

Besprechung: 17. bis 21. Dezember