

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x(y^2 - 1)e^{-x^2 - y^2}.$$

- Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und die Werte an diesen Stellen sowohl symbolisch als auch numerisch.
- Schauen Sie sich an allen kritischen Stellen die Hessematrix an um zu erkennen, wie viele Minima, Maxima und Sättel die Funktion besitzt.
- Zeichnen Sie dann den Graphen der Funktion über einem Rechteck, welches alle kritischen Punkte enthält. Zwei Extrema sieht man sofort. Heben Sie durch geeignete Färbung auch die anderen hervor.

2. Für $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ sei die Differentialgleichung

$$y'' = -ay' + by + \cos(x)$$

gegeben. Lösen Sie für $a = 1$ und $b = -1$ das durch $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ gegebene Anfangswertproblem und zeichnen Sie die Lösung über einem Intervall, das drei bis fünf Nullstellen der Lösung enthält.

- Lösen Sie die Differentialgleichung aus Aufgabe 2 für unbestimmte a und b .
- Diese Differentialgleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung. Bestimmen Sie die Wronskische Determinante, um zu prüfen, dass es sich tatsächlich um ein Fundamentalsystem handelt.
Sie werden eine Fallunterscheidung machen müssen. Bestimmen Sie auch in dem Ausnahmefall ein Fundamentalsystem.
- Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung in dem Ausnahmefall.

4. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad x, y > 0,$$

mit `dsolve`. Zeichnen Sie für $w_1 = \frac{1}{50}$ und $w_2 = \frac{1}{9}$ die Lösungen für die Anfangsbedingungen $y(1) = w_1$ und $y(1) = w_2$. Der besseren Übersicht halber beschränken Sie bitte den Definitionsbereich auf das Intervall $[0, 1.2]$. Achten Sie darauf, alle von `dsolve` angegebenen Lösungen der Anfangswertaufgabe zu zeigen.

Schneiden sich Ihre Kurven etwa? Dann überlegen Sie sich bitte, ob die Kurvenverläufe in Übereinstimmung mit dem Satz von Picard-Lindelöf stehen.

Fügen Sie nun zur Zeichnung das Richtungsfeld der Differentialgleichung hinzu.

Erklären Sie in wenigen Zeilen, welche Kurvenabschnitte zur Lösung gehören.

Bearbeiten Sie bitte die Übungsaufgaben in einem Jupyter-File. Laden Sie bitte Ihr Jupyter-File mit den Lösungen vor dem Abgabetermin in Ihre Gruppe im Ilias hoch. Achten Sie darauf, dass Sie nur ein File hochladen können. Falls Sie aus irgendeinem Grund mehr als ein File hochladen möchten, tun Sie dies bitte in einem Zip-Ordner. Alle Informationen dazu, wie Sie die Aufgaben anschließend in Ihrer Übung vorstellen, finden Sie auf der [Übungsseite im Ilias](#).

Abgabe: Do, 28.01.2021, 10:30

Vorstellung: 5. Kalenderwoche