Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 28.01.2021

Blatt 12

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y'' &= -(1+a)y + aw, \\ w'' &= -(1+b)w + by, \end{aligned}$$

wobei $a = \frac{1}{7}$ und $b = \frac{2}{3}$. Im Gegensatz zur Vorlesung sollen die Koeffizienten $C_1, \ldots, C_4$ aber nicht geraten werden. Stattdessen sollen vier linear unabhängige Anfangsbedingungen erfüllt werden, nämlich

$$\begin{aligned} &y(0) = w(0) = 1, && y'(0) = w'(0) = 0 \\ &y(0) = -w(0) = 1, && y'(0) = w'(0) = 0 \\ &y(0) = w(0) = 0, && y'(0) = w'(0) = 1 \\ &y(0) = w(0) = 0, && y'(0) = -w'(0) = 1. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie außerdem die beiden Lösungen y und w für die Anfangsbedingungen in der zweiten Zeile der Liste.

2. In der Vorlesung war bei den gekoppelten Pendeln unter anderem die folgende Funktion herausgekommen

$$f(t) = \frac{2}{7}\cos(t) + \frac{2}{7}\cos\left(\frac{3\sqrt{7}t}{7}\right).$$

Diese Funktion lässt sich als Vielfaches eines Produkts von trigonometrischen Funktionen schreiben. Finden Sie diese Darstellung.

Hinweis: Wiederholungsaufgabe zu einem früheren Thema

3. Der Sinus löst bekanntlich die Anfangswertaufgabe

$$y'' = -y, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Machen Sie einen Ansatz $\sin x = \sum_{j=0}^{10} a_j x^j + O(x^{11})$ und bestimmen Sie die a_j durch Koeffizientenvergleich.

4. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y'' &= w - y + \cos(3t), \\ w'' &= y - 3w. \end{aligned} \tag{1}$$

Versuche Sie die Lösung mittels `dsolve`. Das wird leider scheitern, weil die Methode der Variation der Konstanten für Systeme nicht implementiert ist.

Machen Sie stattdessen einen Ansatz der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= a\cos(3t) + b\sin(3t). \\ w(t) &= c\cos(3t) + d\sin(3t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Werte für a, b, c und d, für welche der Ansatz das Differentialgleichungssystem löst. Zeichnen Sie dann die Lösungen y und w.

5. Lösen Sie nun das zum inhomogenen System (1) gehörende homogene System. Es wird eine allgemeine Lösung gefunden, welche aber leider im Exponenten Terme der Form `CRootOf(`p`, `n`)` besitzt. Dieses Polynom p ist aber biquadratisch, seine Nullstellen können daher bequem explizit beschrieben werden.

   Bestimmen Sie diese Nullstellen und setzen Sie sie in die allgemeine Lösung ein. Das Polynom p darf man abtippen. (Feiner ist natürlich die Extraktion durch wiederholten Zugriff auf das Attribut `args` der auftretenden Objekte.)

   Zusatzaufgabe: Bewerkstelligen Sie die Ersetzung so, dass sie bei Veränderung des Differentialgleichungssystems keine falschen Ersetzungen vornimmt. Bei der Ersetzung muss man eventuell `replace` anstelle von `subs` einsetzen.

Bearbeiten Sie bitte die Übungsaufgaben in einem Jupyter-File. Laden Sie bitte Ihr Jupyter-File mit den Lösungen vor dem Abgabetermin in Ihre Gruppe im Ilias hoch. Achten Sie darauf, dass Sie nur ein File hochladen können. Falls Sie aus irgendeinem Grund mehr als ein File hochladen möchten, tun Sie dies bitte in einem Zip-Ordner. Alle Informationen dazu, wie Sie die Aufgaben anschließend in Ihrer Übung vorstellen, finden Sie auf der Übungsseite im Ilias.

Abgabe: Do, 04.02.2021, 10:30 **Vorstellung:** 6. Kalenderwoche