

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . Bestimmen Sie zu jeder kritischen Stelle x_0 die zweite Ableitung $f''(x_0)$. Geben Sie schließlich den Wert von f an der lokalen Maximalstelle an. Es muss sichtbar werden, dass der Wert an der lokalen Maximalstelle die Form $a + b\sqrt{10}$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ hat.

2. Für $b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Kubik

$$f(x) = x^3 + bx^2 + c.$$

Bestimmen Sie diejenigen Paare (b, c) , für welche f eine doppelte Nullstelle besitzt (also ein x_0 mit $f(x_0) = f'(x_0) = 0$).

Hinweis: Es handelt sich um eine einparametrische Schar. Die Lösung wird also in der Form $b = g(c)$ oder $c = g(b)$ angegeben.

3. Für $f(x, y) = \cos(x^4 + 2y^2)$ sei $g = \frac{\partial^{15} f}{\partial x^5 \partial y^{10}}$. Dann kann g geschrieben werden als

$$g(x, y) = \sum_{m=0}^{15} \sum_{n=0}^{10} (a_{m,n} \cos(x^4 + 2y^2) + b_{m,n} \sin(x^4 + 2y^2)) y^n x^m.$$

Bestimmen Sie $a_{0,0}$, $b_{3,0}$ und $a_{15,8}$.

Hinweis: Der Koeffizient soll mit `sympy` isoliert und nicht nur abgelesen werden.

4. Die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sollen demselben Rekursionsgesetz wie die Fibonacci-Zahlen genügen, also

$$d_{n+2} = d_n + d_{n+1}, \quad d = x, y,$$

allerdings mit den Anfangsbedingungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ bzw. $y_1 = 1$ und $y_2 = 0$. Schreiben Sie die beiden Folgen als rekursiv definierte Funktionen und geben Sie jeweils die ersten zwölf Werte aus.

Finden Sie dann für $d = x$ und $d = y$ jeweils Zahlen a, b, A, B , so dass

$$d_n = aA^n + bB^n.$$

5. Überzeugen Sie sich durch Lesen des Hilfetextes und Ausprobieren für kleine n , dass durch `list(primerange(1,n))` eine Liste aller Primzahlen zwischen 1 und n gegeben wird. Benutzen Sie das, um für $j = 1, \dots, 7$ die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als $n = 10^j$ sind, zu bestimmen. Vergleichen Sie diese Anzahlen mit $\frac{n}{\ln n}$.

Bearbeiten Sie bitte die Übungsaufgaben in einem Jupyter-File. Laden Sie bitte Ihr Jupyter-File mit den Lösungen vor dem Abgabetermin in Ihre Gruppe im Ilias hoch. Achten Sie darauf, dass Sie nur ein File hochladen können. Falls Sie aus irgendeinem Grund mehr als ein File hochladen möchten, tun Sie dies bitte in einem Zip-Ordner. Alle Informationen dazu, wie Sie die Aufgaben anschließend in Ihrer Übung vorstellen, finden Sie auf der [Übungsseite im Ilias](#).

Abgabe: Do, 26.11.2020, 10:30

Vorstellung: 49. Kalenderwoche